

Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit *Schistosomiasis* dengan *Saturated Incidence Rate*

Elda Widya^{1,*}, Miswanto¹ & Cicik Alfiniyah¹

¹Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Indonesia

*Corresponding author : elda.widya.indriah-2016@fst.unair.ac.id

Abstract. Schistosomiasis is a disease caused by infections of the genus *Schistosoma*. Schistosomiasis can be transmitted through schistosoma worms that contact human skin. Schistosomiasis is a disease that continues to increase in spread. Saturated incidence rates pay attention to the ability to infect a disease that is limited by an increase in the infected population. This thesis formulates and analyzes a mathematical model of the distribution of schistosomiasis with a saturated incidence rate. Based on the analysis of the model, two equilibrium points are obtained, namely non-endemic equilibrium points (E_0) and endemic equilibrium points (E_1). Both equilibrium points are conditional asymptotically stable. The nonendemic equilibrium point will be asymptotically stable if $r_h > d_h$, $r_s > d_s$ and $R_0 < 1$, while the endemic equilibrium point will be asymptotically stable if $R_0 > 1$. Sensitivity analysis shows that there are parameters that affect the spread of the disease. Based on numerical simulation results show that when $R_0 < 1$, the number of infected human populations (H_i), the number of infected snail populations (S_i), the amount of cercaria density (C) and the amount of miracidia density (M) will tend to decrease until finally extinct. Otherwise at the time $R_0 > 1$, the number of the four populations tends to increase before finally being in a constant state.

Keywords: *kestabilan, model matematika, schistosomiasis, saturated incidence rate.*

1 Pendahuluan

Schistosomiasis adalah penyakit yang disebabkan oleh infeksi cacing dari genus *Schistosoma*. Seseorang dapat terinfeksi ketika larva cacing masuk lewat kulit manusia setelah kontak dengan air yang terinfeksi *schistosomiasis* [1]. *Schistosomiasis* banyak ditemukan di daerah tropis dan subtropis. Sebagian besar daerah endemik terletak di Timur Tengah, Amerika Selatan, Asia Tenggara dan Afrika. Lebih dari 779 juta orang di dunia berisiko terinfeksi *schistosomiasis* [2].

Penularan schistosomiasis terjadi ketika penderita *schistosomiasis* buang air besar sembarangan, maka telur *schistosoma* akan menetas dalam air. Telur yang menetas menjadi *miracidia* dan masuk ke dalam tubuh siput yang dijadikan sebagai inangnya. Di dalam tubuh siput, larva tersebut berkembang menjadi *cercaria* lalu dikeluarkan dalam air. Ketika manusia melakukan kontak dengan air yang terinfeksi *schistosomiasis* maka

cercaria menembus kulit manusia. Di dalam tubuh, *cercaria* berkembang biak hingga menghasilkan telur. Beberapa telur dikeluarkan dari tubuh dalam tinja atau urin [3]. Jadi, telur tersebut akan melanjutkan siklus hidup *schistosomiasis* hingga akhirnya masuk ke tubuh manusia.

Upaya pemberantasan *schistosomiasis* difokuskan pada upaya pengendalian secara preventif. *World Health Organization* (WHO) merekomendasikan obat *praziquantel* untuk mengobati penderita *schistosomiasis*. Pemberian *praziquantel* harus diberikan secara berkala selama beberapa tahun agar pengobatan lebih efektif. Kendala yang dialami adalah keterbatasan ketersediaan *praziquantel*. Selain itu, *praziquantel* hanya dapat membunuh cacing yang sudah dewasa di dalam tubuh [4].

Model matematika telah digunakan secara luas untuk mendeskripsikan permasalahan *real*, termasuk penyebaran suatu penyakit menular. Penelitian tentang penyebaran penyakit *schistosomiasis* telah dilakukan oleh beberapa peneliti seperti [5], [6] dan [7]. [5] telah mengkaji tentang penyebaran *schistosomiasis* dengan memperhatikan penyebaran *Schistosoma japonica* dengan pertimbangan fluktuasi tingkat air musiman Danau Poyang di Jiangxi, Cina. Selanjutnya [6] melakukan penelitian tentang penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan adanya waktu inkubasi. Berikutnya [7] melakukan penelitian tentang penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan memperhatikan waktu tunda.

Model matematika penyebaran penyakit *schistosomiasis* pada manusia merujuk pada model yang digunakan oleh [7]. Model tersebut telah dilakukan modifikasi tanpa menggunakan waktu tunda. Penulis juga Merubah bentuk *incidence rate* yang semula *bilinear incidence rate* menjadi *saturated incidence rate*. Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik untuk melakukan analisis titik setimbang serta melakukan interpretasi hasil simulasi numerik pada model penyebaran penyakit *schistosomiasis* pada manusia.

2 Model Matematika Penyebaran Penyakit *Schistosomiasis* dengan *Saturated Incidence Rate*

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai model matematika penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* yang mengacu pada jurnal yang ditulis oleh [7] berupa sistem persamaan diferensial biasa non linier yang terbagi menjadi enam kompartemen yang terbentuk dari jenis populasi manusia, populasi siput, dan populasi cacing. Populasi manusia terbagi menjadi dua subpopulasi yaitu populasi manusia rentan (H_s) dan populasi manusia terinfeksi (H_i). Populasi siput terbagi menjadi dua subpopulasi yaitu populasi siput rentan (S_s) dan populasi siput terinfeksi (S_i). Populasi cacing dibagi menjadi dua subpopulasi yaitu populasi *Cercaria* (C) dan populasi *Miracidia* (M). Asumsi yang digunakan dalam model matematika penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* sebagai berikut:

1. Populasi manusia yang rentan bertambah karena adanya pertumbuhan dengan laju logistik.
2. Populasi siput yang rentan bertambah karena adanya pertumbuhan dengan laju logistik.
3. Penyebaran *schistosomiasis* terjadi karena adanya interaksi antara *cercaria* dengan manusia serta interaksi antara *miracidia* dengan siput.
4. Populasi manusia yang sembuh dari infeksi dapat menjadi rentan kembali.
5. Siput yang terinfeksi tidak akan bisa sembuh.

Tabel 1 Variabel dalam Model Penyebaran Penyakit *Schistosomiasis* dengan *Saturated Incidence Rate*

Variabel	Keterangan
$H_s(t)$	Populasi manusia rentan pada saat t
$H_i(t)$	Populasi manusia terinfeksi pada saat t
$S_s(t)$	Populasi siput rentan pada saat t
$S_i(t)$	Populasi siput terinfeksi pada saat t
$C(t)$	Kepadatan <i>Cercaria</i> pada saat t
$M(t)$	Kepadatan <i>Miracidia</i> pada saat t

Tabel 2 Parameter dalam Model Penyebaran Penyakit *Schistosomiasis* dengan *Saturated Incidence Rate*

Parameter	Keterangan	Satuan
r_h	Laju kelahiran pada populasi manusia	1/satuan waktu
k_1	Kapasitas pendukung populasi manusia	individu
a_c	Laju transmisi <i>cercaria</i> terhadap manusia	1/(individu x satuan waktu)
θ_{is}	Laju transmisi manusia terinfeksi ke manusia rentan	1/satuan waktu
d_h	Laju kematian alami populasi manusia	1/satuan waktu
β	Tingkat kejenuhan	1/individu
r_s	Laju kelahiran pada populasi siput	1/satuan waktu
k_2	Kapasitas pendukung populasi siput	individu
b_m	Laju transmisi <i>miracidia</i> terhadap siput	1/(individu x satuan waktu)
d_s	Laju kematian alami populasi siput	1/satuan waktu
γ	Tingkat kejenuhan	1/individu
σ	Laju produksi <i>cercaria</i> per siput yang terinfeksi	1/satuan waktu
d_c	Laju kematian alami <i>cercaria</i>	1/satuan waktu
α	Laju penetasan <i>miracidia</i> dari telur	1/satuan waktu
d_m	Laju kematian alami <i>miracidia</i>	1/satuan waktu

Notasi dan definisi dari masing-masing variabel serta parameter pada model penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* yang disajikan dalam Tabel 1 dan Tabel 2.

Selanjutnya untuk mempermudah penulisan maka notasi kompartemen $H_s(t), H_i(t), S_s(t), S_i(t), C(t)$ dan $M(t)$ berturut-turut dapat ditulis dengan H_s, H_i, S_s, S_i, C , dan M . Notasi tersebut diasumsikan sebagai jumlah populasi pada waktu (t), sehingga harus memenuhi syarat $H_s, H_i, S_s, S_i, C, M \geq 0$. Sedangkan, seluruh parameter diasumsikan bernilai positif. Oleh karena itu, parameter yang digunakan dalam model penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* diasumsikan sebagai berikut:

$$r_h, k_1, a_c, \theta_{is}, d_h, \beta, r_s, k_2, b_m, d_s, \gamma, \sigma, d_c, \alpha, d_m > 0.$$

Berdasarkan asumsi-asumsi dan parameter yang telah dijelaskan diatas, maka model matematika penyebaran penyakit schistosomiasis dengan *saturated incidence rate* dinyatakan dalam persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dH_s}{dt} = r_h H_s \left(1 - \frac{H_s}{k_1}\right) - \frac{a_c C H_s}{1 + \beta C} + \theta_{is} H_i - d_h H_s \quad (1)$$

$$\frac{dH_i}{dt} = \frac{a_c C H_s}{1 + \beta C} - (\theta_{is} + d_h) H_i \quad (2)$$

$$\frac{dS_s}{dt} = r_s S_s \left(1 - \frac{S_s}{k_2}\right) - \frac{b_m M S_s}{1 + \gamma M} - d_s S_s \quad (3)$$

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{b_m M S_s}{1 + \gamma M} - d_s S_i \quad (4)$$

$$\frac{dC}{dt} = \sigma S_i - d_c C \quad (5)$$

$$\frac{dM}{dt} = \alpha H_i - d_m M \quad (6)$$

Persamaan (1) mempresentasikan laju perubahan populasi manusia rentan per satuan waktu. Populasi manusia rentan bertambah karena adanya laju kelahiran pada populasi manusia dengan fungsi logistik serta manusia yang terinfeksi menjadi rentan setelah pulih. Sedangkan populasi manusia rentan berkurang karena adanya interaksi antara manusia rentan dan *cercaria* serta adanya kematian alami.

Persamaan (2) mempresentasikan laju perubahan populasi manusia terinfeksi per satuan waktu. Populasi manusia terinfeksi bertambah karena adanya interaksi antara manusia rentan dan *cercaria*. Sedangkan populasi manusia terinfeksi berkurang karena kematian alami dan manusia yang terinfeksi menjadi rentan setelah pulih.

Persamaan (3) mempresentasikan laju perubahan populasi siput rentan per satuan waktu. Populasi siput rentan bertambah karena adanya laju kelahiran pada populasi siput dengan fungsi logistik. Sedangkan populasi siput rentan berkurang karena adanya interaksi antara siput rentan dan *miracidia* serta adanya kematian alami.

Persamaan (4) mempresentasikan laju perubahan populasi siput terinfeksi per satuan waktu. Populasi siput terinfeksi bertambah karena adanya interaksi antara siput rentan dan *miracidia*. Sedangkan populasi siput terinfeksi berkurang karena kematian alami.

Persamaan (5) mempresentasikan laju perubahan kepadatan *cercaria* per satuan waktu. Kepadatan *cercaria* bertambah karena adanya *cercaria* yang keluar dari siput dari ekskresi per wilayah. Sedangkan perubahan kepadatan *cercaria* berkurang karena kematian alami.

Persamaan (6) mempresentasikan laju perubahan kepadatan *miracidia* per satuan waktu. Kepadatan *miracidia* bertambah karena adanya penetasan telur *miracidia* pada setiap wilayah setelah dikeluarkan bersama tinja manusia terinfeksi. Sedangkan perubahan kepadatan *miracidia* berkurang karena kematian alami.

3 Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran Penyakit *Schistosomiasis* dengan *Saturated Incidence Rate*

Kadaan setimbang suatu sistem merupakan suatu kondisi dimana laju perubahan populasi bernilai konstan. Model matematika penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* akan memiliki titik setimbang jika memenuhi $\frac{dH_s}{dt} = \frac{dH_i}{dt} = \frac{dS_s}{dt} = \frac{dS_i}{dt} = \frac{dC}{dt} = \frac{dM}{dt} = 0$. Berdasarkan persamaan tersebut, diperoleh dua titik setimbang yaitu titik setimbang non endemik dan titik setimbang endemik.

- **Titik setimbang non endemik** merupakan suatu kondisi dimana tidak terdapat penyebaran penyakit. Titik setimbang non endemik tersebut diperoleh pada saat tidak ada manusia dan siput yang terinfeksi dalam populasi ($H_i = S_i = C = M = 0$). Misalkan titik setimbang kepunahan dinotasikan dengan E_0 , maka $E_0 = (H_s, H_i, S_s, S_i, C, M) = (\frac{k_1(r_h - d_h)}{r_h}, 0, \frac{k_2(r_s - d_s)}{r_s}, 0, 0, 0)$. E_0 akan eksis jika memenuhi

- $r_h - d_h$
- $r_s > d_s$

- **Basic Reproduction Number**

Selanjutnya akan ditentukan *Basic Reproduction Number* (R_0) yang digunakan sebagai parameter ambang penentuan kriteria endemik peyakit pada populasi (R_0) adalah parameter yang menyatakan rata-rata jumlah populasi baru yang terinfeksi

penyakit menular terhadap individu yang rentan. Dalam penelitian ini, digunakan metode *Next-Generation Matrix* (NGM) untuk menghitung nilai (R_0) yakni dengan membangun matriks yang membangkitkan jumlah individu baru yang terinfeksi. Dari metode tersebut didapatkan nilai

$$R_0 = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{(\theta_{is} + d_h)} \left(\frac{\sigma}{d_s}\right) \left(\frac{a_c k_1 (r_h - d_h)}{r_h d_c}\right) \left(\frac{b_m k_2 (r_s - d_s)}{r_s d_m}\right)}$$

- **Titik setimbang endemik** adalah kondisi saat terjadi penyebaran penyakit *schistosomiasis*. Diperoleh titik setimbang endemik yang dinyatakan sebagai $E_1 = (H_s^*, H_i^*, S_s^*, S_i^*, C^*, M^*)$, dengan

$$H_s^* = \frac{(\theta_{is} + d_h)H_i^* + \beta\sigma\frac{(\theta_{is} + d_h)}{d_c}H_i^*S_i^*}{\frac{a_c\sigma}{d_c}S_i^*}$$

$$S_s^* = \frac{d_s S_i^* + \left(\frac{a\gamma d_s}{d_m}\right)H_i^*S_i^*}{\frac{a b_m H_i^*}{d_m}}$$

$$C^* = \frac{\sigma}{d_c}S_i^*$$

$$M^* = \frac{\alpha}{d_m}H_i^*$$

$$H_i^* = \frac{a_1 S_i^{*2} + a_2 S_i^*}{a_3 S_i^{*2} + a_4 S_i^* + a_5}$$

dengan

$$a_1 = k_1 a_c \left(\frac{\sigma}{d_c}\right)^2 ((r_h - d_h)\beta(\theta_{is} + d_h) - d_h a_c)$$

$$a_2 = k_1 (r_h - d_h)(\theta_{is} + d_h) \frac{a_c \sigma}{d_c}$$

$$a_3 = r_h \left(\beta\sigma\frac{(\theta_{is} + d_h)}{d_c}\right)^2$$

$$a_4 = 2r_h(\theta_{is} + d_h)^2 \frac{\beta\sigma}{d_c}$$

$$a_5 = r_h(\theta_{is} + d_h)^2$$

dan S_i^* merupakan akar positif dari persamaan

$$c_1 S_i^{*4} + c_2 S_i^{*3} + c_3 S_i^{*2} + c_4 S_i^* + c_5 = 0$$

dengan

$$c_1 = a_1^2 b_3 + a_1 a_3 b_4 + a_3^2 b_5$$

$$c_2 = 2a_1 a_2 b_3 + (a_1 a_4 + a_2 a_3) b_4 + 2a_3 a_4 b_5 - (a_1^2 b_1 + a_1 a_3 b_2)$$

$$c_3 = a_2^2 b_3 + (a_1 a_5 + a_2 a_4) b_4 + (a_4^2 + 2a_3 a_5) b_5 - (2a_1 a_2 b_1 + (a_1 a_4 + a_2 a_3) b_2)$$

$$c_4 = a_2 a_5 b_4 + a_4 a_5 b_5 - (a_2^2 b_1 + (a_1 a_5 + a_2 a_4) b_2)$$

$$c_5 = a_5^2 b_5 - a_2 a_5 b_2$$

$$b_1 = k_2 b_m d_s \left(\frac{\alpha}{d_m} \right)^2 ((r_s - d_s) \gamma - b_m)$$

$$b_2 = k_2 (r_s - d_s) d_s \frac{\alpha b_m}{d_m}$$

$$b_3 = r_s \left(\frac{\alpha \gamma d_s}{d_m} \right)^2$$

$$b_4 = 2r_s d_s^2 \frac{\alpha \gamma}{d_m}$$

$$b_5 = r_s d_s^2$$

Titik **setimbang** endemik $E_1 = (H_s^*, H_i^*, S_s^*, S_i^*, C^*, M^*)$ eksis jika:

1. $S_i < \left(\frac{(r_h - d_h)(\theta_{i_s} + d_h)}{\left(\frac{\sigma}{d_c} (d_h a_c - (r_h - d_h) \beta (\theta_{i_s} + d_h)) \right)} \right)$
2. $R_0 > 1$

$$\begin{aligned}
& \frac{d_s^2 \left((r_h - d_h)(\theta_{is} + d_h) \right)^2 \frac{\alpha\gamma}{d_m} k_1 + (d_h a_c)^2 \frac{\alpha\gamma}{d_m} k_1}{2d_h \beta (\theta_{is} + d_h) \left((r_h - d_h) k_1 a_c \frac{\alpha\gamma}{d_m} + r_h \beta (\theta_{is} + d_h) d_s^2 \right)} \\
& + \frac{d_s^2 \left((r_h - d_h) r_h (\beta (\theta_{is} + d_h))^2 \right)}{k_1 d_h \left((r_h - d_h) k_1 a_c \frac{\alpha\gamma}{d_m} + r_h \beta (\theta_{is} + d_h) d_s^2 \right)} \\
& + \frac{d_s^2 (r_h (\beta (\theta_{is} + d_h))^2)^2}{2k_1 a_c^2 d_h \beta (\theta_{is} + d_h) \frac{\alpha\gamma}{d_m} \left((r_h - d_h) k_1 a_c \frac{\alpha\gamma}{d_m} + r_h \beta (\theta_{is} + d_h) d_s^2 \right)} \\
& > 1.
\end{aligned}$$

4 Analisis Kestabilan Titik Setimbang

Model matematika penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* pada artikel ini berbentuk sistem diferensial nonlinear sehingga harus dilakukan linearisasi dengan menggunakan matriks Jacobian untuk menguji kestabilan lokal dari titik setimbang yang telah diperoleh sebelumnya. Adapun matriks jacobian dari model adalah sebagai berikut :

$$J = \begin{pmatrix} q_1 - \frac{a_c C}{1 + \beta C} - 2r_h \frac{H_s}{k_1} & \theta_{is} & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_c H_s}{(1 + \beta C)^2} & 0 \\ \frac{a_c C}{1 + \beta C} & -q_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_c H_s}{(1 + \beta C)^2} & 0 \\ 0 & 0 & q_3 - \frac{b_m M}{1 + \gamma M} - 2r_s \frac{S_s}{k_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_m S_s}{(1 + \gamma M)^2} \\ 0 & 0 & \frac{b_m M}{1 + \gamma M} & -d_s & 0 & 0 & \frac{b_m S_s}{(1 + \gamma M)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & -d_c & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_m \end{pmatrix}$$

dengan

$$q_1 = r_h - d_h$$

$$q_2 = \theta_{is} + d_h$$

$$q_3 = r_s - d_s$$

4.1 Kestabilan Titik Setimbang Non Endemik

Matriks *Jacobian* titik setimbang non endemik $E_0 = (H_s, H_i, S_s, S_i, C, M) = \left(\frac{k_1(r_h - d_h)}{r_h}, 0, \frac{k_2(r_s - d_s)}{r_s}, 0, 0, 0 \right)$ sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -q_1 & \theta_{is} & 0 & 0 & -q_4 & 0 \\ 0 & -q_2 & 0 & 0 & q_4 & 0 \\ 0 & 0 & -q_3 & 0 & 0 & -q_5 \\ 0 & 0 & 0 & -d_s & 0 & q_5 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & -d_c & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & -d_m \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} q_1 &= r_h - d_h \\ q_2 &= \theta_{is} + d_h \\ q_3 &= r_s - d_s \\ q_4 &= \frac{k_1 a_c q_1}{r_h} \\ q_5 &= \frac{k_2 b_m q_3}{r_s} \end{aligned}$$

Berdasarkan matriks Jacobian tersebut dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $\det(\lambda I - J(E_0)) = 0$, yaitu

$$(\lambda + q_1)(\lambda + q_3)(\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4) = 0$$

dengan

$$\begin{aligned} p_1 &= q_2 + d_m + d_s + d_c \\ p_2 &= d_c(d_s + q_2 + d_m) + d_s(q_2 + d_m) + q_2 d_m \\ p_3 &= d_c(d_s(q_2 + d_m) + q_2 d_m) + q_2 d_m d_s \\ p_4 &= q_2 d_m d_s d_c - \alpha \sigma q_4 q_5 \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -q_1 = -(r_h - d_h)$ dan $\lambda_2 = -q_2 = -(r_s - d_s)$ serta sisanya adalah akar-akar dari persamaan berikut:

$$(\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4) = 0$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz maka titik setimbang non endemik akan stabil jika:

- a. $r_h > d_h$
- b. $r_s > d_s$
- c. $R_0 < 1$

4.2 Kestabilan Titik Setimbang Endemik

Matriks *Jacobian* titik setimbang non endemik E_1 adalah sebagai berikut:

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} A_1 & \theta_{is} & 0 & 0 & -A_2 & 0 \\ A_3 & -q_2 & 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & 0 & 0 & -A_5 \\ 0 & 0 & A_6 & -d_s & 0 & A_5 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & -d_c & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & -d_m \end{pmatrix}$$

dengan

$$A_1 = q_1 - 2 \frac{r_h}{k_1} H_s^* - \frac{a_c C^*}{1 + \beta C^*}$$

$$A_2 = \frac{a_c H_s^*}{(1 + \beta C^*)^2}$$

$$A_3 = \frac{a_c C^*}{1 + \beta C^*}$$

$$A_4 = q_2 - 2 \frac{r_s}{k_2} S_s^* - \frac{b_m M^*}{1 + \gamma M^*}$$

$$A_5 = \frac{b_m S_s^*}{(1 + \gamma M^*)^2}$$

$$A_6 = \frac{b_m M^*}{1 + \gamma M^*}$$

Berdasarkan matriks Jacobian tersebut dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $\det(\lambda I - J(E_1)) = 0$, yaitu

$$\lambda^6 + m_1 \lambda^5 + m_2 \lambda^4 + m_3 \lambda^3 + m_4 \lambda^2 + m_5 \lambda + m_6 = 0 \quad (7)$$

dengan

$$m_1 = q_2 + d_c + d_m + d_s - A_1 - A_4$$

$$m_2 = d_c(d_s + d_m + q_2 - A_1 - A_4) + d_s(d_m + q_2 - A_1 - A_4) - A_4(d_m + q_2 - A_1) + d_m(q_2 - A_1) - q_2 A_1 - \theta_{is} A_3$$

$$m_3 = d_c(d_s(d_m + q_2 - A_1 - A_4) - A_4(d_m + q_2 - A_1) + d_m(q_2 - A_1) - q_2 A_1) + d_s(-A_4(d_m + q_2 - A_1) + d_m(q_2 - A_1) - q_2 A_1) - A_4(d_m(q_2 - A_1) - q_2 A_1) + q_2 A_1 d_m - \theta_{is} A_3(d_c + d_s + d_m - A_4)$$

$$m_4 = d_c(d_s(-A_4(d_m + q_2 - A_1) + d_m(q_2 - A_1) - q_2 A_1) - A_4(d_m(q_2 - A_1) - q_2 A_1) + q_2 A_1 d_m) - (d_s(A_4(d_m(q_2 - A_1) - q_2 A_1) + q_2 A_1 d_m) - q_2 A_1 d_m A_4) + -\theta_{is} A_3(d_c(d_s + d_m - A_4) + d_s(d_m - A_4) - d_m A_4)$$

$$m_5 = -(d_c(d_s(A_4(d_m(q_2 - A_1) - q_2 A_1) + q_2 A_1 d_m) - q_2 A_1 d_m A_4) - q_2 A_1 d_m A_4 d_s) + -\theta_{is} A_3(d_c(d_s(d_m - A_4) - d_m A_4) - d_m A_4 d_s)$$

$$m_6 = q_2 A_1 d_m A_4 d_s d_c - \theta_{is} A_3(d_m A_4 d_s d_c + -A_4 A_3 \alpha \sigma A_2 \lambda - A_4 A_3 \alpha \sigma A_2 d_s + \alpha \sigma A_2 A_3 A_4 A_5)$$

Untuk menentukan akar-akar dari persamaan karakteristik diatas sulit untuk dicari solusinya secara analitik, sehingga titik setimbang penyebaran penyakit *schistosomiasis* ini akan di analisis melalui simulasi numerik dengan menggunakan grafik bidang fase. Berikut adalah tabel nilai awal dan nilai parameter yang digunakan.

Tabel 3 Nilai Parameter untuk Menentukan Kestabilan Titik Setimbang Endemik

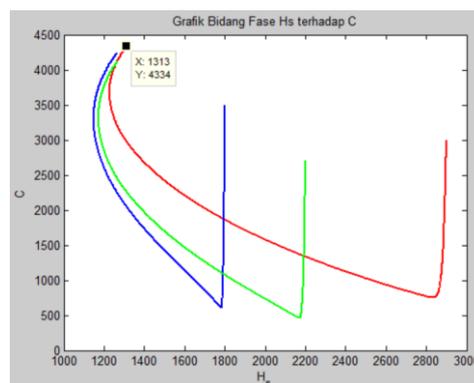
Parameter	Nilai	Sumber
r_h	0,005	Asumsi
k_1	3000	Asumsi
a_c	0,00001914	[7]
θ_{is}	0,00075	[7]
d_h	0,00003914	[7]
β	0,004	Asumsi
r_s	0,02	Asumsi
k_2	2000	Asumsi
b_m	0,000084	[7]
d_s	0,00033	[7]
γ	0,003	Asumsi
σ	0,7	[7]
d_c	1	[7]
α	0,6	[7]
d_m	2	[7]

Nilai awal untuk populasi disajikan pada Tabel 4 berikut ini.

Tabel 4 Nilai Awal untuk Bidang Fase Model Penyebaran Penyakit *Schistosomiasis* dengan *Saturated Incidence Rate*

Nilai Awal	$H_s^*(0)$	$H_i^*(0)$	$S_s^*(0)$	$S_i^*(0)$	$C^*(0)$	$M^*(0)$
1	2900	1200	1000	1000	3000	3000
2	1800	1700	900	800	3500	2500
3	2200	1300	800	600	2000	1500

Berdasarkan nilai parameter di atas dan pemberian tiga nilai awal yang berbeda dengan rentang waktu $t = 0$ hingga $t = 1000$, diperoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 1 Grafik Bidang Fase Populasi H_s terhadap H_i pada Model Matematika Penyebaran Penyakit *Schistosomiasis* dengan *Saturated Incidence Rate*

Gambar 1 merupakan grafik bidang fase populasi H_s terhadap C dari model penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate*. Gambar di atas menunjukkan bahwa pemberian nilai tiga awal yang berbeda akan menghasilkan grafik yang cenderung konvergen ke satu titik. Titik tersebut yaitu (1313; 4334) yang tidak lain adalah bagian dari titik setimbang penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate*. Selain itu berdasarkan pada nilai parameter yang diberikan maka didapatkan nilai $R_0 = 9.334074751 > 1$.

Dari uraian diatas, dapat disimpulkan bahwa titik setimbang $E_1 = (H_s^*, H_i^*, S_s^*, S_i^*, C^*, M^*)$ pada model matematika penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* stabil asimtotis jika dan hanya jika $R_0 > 1$. Hal ini menunjukkan bahwa populasi *cercaria* (C) dan *miracidia* (M) dapat menularkan *schistosomiasis* kepada kurang lebih dari satu penderita baru, sehingga *schistosomiasis* dapat menyebar luas atau dengan kata lain terjadi kondisi endemik *schistosomiasis*.

4.3 Analisis Sensitivitas Parameter

Analisis sensitivitas digunakan untuk mengetahui parameter yang paling berpengaruh pada suatu model (Chitniz dkk, 2009). Dalam hal ini akan ditentukan indeks sensitivitas pada setiap parameter yang terlibat pada *basic reproduction number* (R_0) dari model matematika penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate*. Nilai R_0 yang akan digunakan dalam analisis sensitivitas model matematika penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* adalah

$$R_0 = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{(\theta_{is} + d_h)} \left(\frac{\sigma}{d_s}\right) \left(\frac{a_c k_1 (r_h - d_h)}{r_h d_c}\right) \left(\frac{b_m k_2 (r_s - d_s)}{r_s d_m}\right)}$$

Indeks sensitivitas parameter dirumuskan sebagai berikut:

$$idm = \frac{\partial R_0}{\partial p} \times \frac{p}{R_0}$$

dengan:

idm = indeks sensitivitas parameter p

p = parameter yang dianalisis

Terlihat bahwa terdapat 13 parameter yang akan dihitung indeks sensitivitasnya yaitu $r_h, k_1, a_c, \theta_{is}, d_h, r_s, k_2, b_m, d_s, \sigma, d_c, \alpha, d_m$. Hasil indeks sensitivitas parameter model matematika penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* dapat dilihat pada Tabel 5 berikut ini:

Tabel 5 Hasil Perhitungan Indeks Parameter Model Matematika Penyebaran Penyakit *Schistosomiasis* dengan *Saturated Incidence Rate*

Parameter	Indeks Sensitivitas
r_h	0,0019
k_1	0,25
a_c	0,25
θ_{is}	-0,237
d_h	-0,014
r_s	0.0042
k_2	0,25
b_m	0,25
d_s	-0.254
σ	0,25
d_c	-0,25
α	0,25
d_m	-0,25

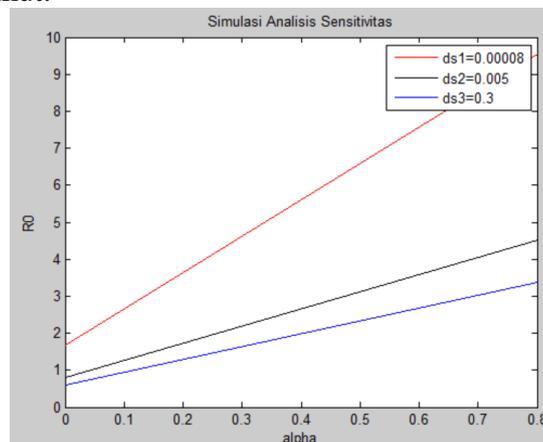
Berdasarkan Tabel 5 dapat diperoleh beberapa hal yaitu:

1. Indeks sensitivitas parameter r_h adalah 0,0019, artinya jika laju kelahiran pada populasi manusia bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan bertambah (berkurang) sebesar 0.019%.
2. Indeks sensitivitas parameter k_1 adalah 0,25, artinya jika jumlah kapasitas pendukung populasi manusia bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan bertambah (berkurang) sebesar 2,5%.
3. Indeks sensitivitas parameter a_c adalah 0,25, artinya jika laju transmisi *cercaria* terhadap manusia bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan berkurang (bertambah) sebesar 2,5%.
4. Indeks sensitivitas parameter θ_{is} adalah -0,237, artinya jika laju transmisi manusia terinfeksi ke manusia rentan bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan berkurang (bertambah) sebesar 2,37%.
5. Indeks sensitivitas parameter d_h adalah -0,014, artinya jika laju kematian alami populasi manusia bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan berkurang (bertambah) sebesar 0,14%.
6. Indeks sensitivitas parameter r_s adalah 0,0042 artinya jika laju kelahiran pada populasi siput bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan bertambah (berkurang) sebesar 0,042%.
7. Indeks sensitivitas parameter k_2 adalah 0,25, artinya jika kapasitas pendukung populasi siput bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan bertambah (berkurang) sebesar 2,5%.
8. Indeks sensitivitas parameter b_m adalah 0,25, artinya jika laju transmisi *miracidia* terhadap siput bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan bertambah (berkurang) sebesar 2,5%.

9. Indeks sensitivitas parameter d_s adalah -0,254, artinya jika laju kematian alami populasi siput bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan berkurang (bertambah) sebesar 2,54%.
10. Indeks sensitivitas parameter σ adalah 0,25, artinya jika laju produksi *cercaria* per siput yang terinfeksi bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan bertambah (berkurang) sebesar 2,5%.
11. Indeks sensitivitas parameter d_c adalah -0,25, artinya jika laju kematian alami *cercaria* bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan berkurang (bertambah) sebesar 2,5%.
12. Indeks sensitivitas parameter α adalah 0,25, artinya jika laju penetasan *miracidia* dari telur bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan bertambah (berkurang) sebesar 2,5%.
13. Indeks sensitivitas parameter d_m adalah -0,25, artinya jika laju penetasan *miracidia* dari telur bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai R_0 akan berkurang (bertambah) sebesar 2,5%.

Berdasarkan penjelasan diatas, terdapat 13 parameter yang mempengaruhi besar kecilnya nilai R_0 . Sedangkan parameter yang paling berpengaruh dalam model matematika penyebaran *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* adalah d_s . Hal itu karena nilai indeks parameter d_s memiliki nilai mutlak indeks parameter tertinggi dibanding dengan parameter lainnya.

Selanjutnya akan disimulasikan parameter d_s dan r_s terhadap R_0 . Pada simulasi ini dipilih nilai $d_s = 0,2$, $d_s = 0,5$ dan $d_s = 0,7$. Hasil simulasi sensitivitas parameter d_s terhadap R_0 adalah sebagai berikut:



Gambar 2 Grafik Sensitivitas d_s dan α terhadap R_0

Berdasarkan Gambar 2 menunjukkan bahwa dengan memilih tiga nilai d_s yang berbeda dan nilai r_s , grafik menunjukkan bahwa semakin kecil nilai d_s dan α mengakibatkan semakin besar nilai R_0 .

5 Simulasi Numerik dan Interpretasi Model Matematika Penyebaran Penyakit *Schistosomiasis* dengan *Saturated Incidence Rate*

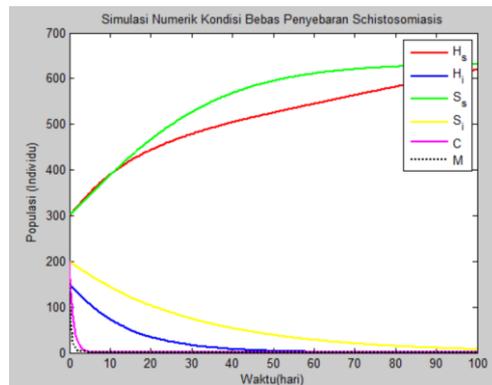
Subbab ini membahas mengenai simulasi numerik model matematika penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate*. Terdapat dua kondisi yang disimulasikan, yaitu saat kondisi bebas penyebaran penyakit *schistosomiasis* dan kondisi penyebaran penyakit *schistosomiasis*. Simulasi dilakukan dengan bantuan *software* MATLAB dan dengan memasukkan nilai awal untuk masing-masing populasi.

Kondisi bebas Penyakit *Schistosomiasis* terjadi ketika popluasi penyebar *schistosomiasis* tidak ada atau dengan kata lain tidak ada penyebaran penyakit *schistosomiasis* ($R_0 < 1$). Simulasi dilakukan untuk $t = 0$ sampai $t = 100$ dalam satuan hari. Nilai parameter saat kondisi bebas penyebaran *schistosomiasis* adalah sebagai berikut:

Tabel 6 Nilai Parameter untuk Menentukan Kestabilan Titik Setimbang Non Endemik

Parameter	Nilai	Sumber
r_h	0,005	Asumsi
k_1	1600	Asumsi
a_{ch}	0,0001914	[7]
θ_{is}	0,075	[7]
d_h	0,00003914	[7]
β	0,03	Asumsi
r_s	0,09	Asumsi
k_2	1000	Asumsi
b_{ms}	0,0000084	[7]
d_s	0,033	[7]
γ	0,04	Asumsi
σ	0,0007	[7]
b	1	[7]
d_c	0,035	[7]
α	2	[7]

Berdasarkan nilai parameter yang diberikan pada Tabel 6, diperoleh $R_0 = 0,053176984 < 1$. Berikut merupakan hasil simulasi numerik saat kondisi bebas penyebaran penyakit *schistosomiasis*:



Gambar 3 Grafik Simulasi Numerik saat Kondisi Bebas Penyebaran Penyakit *Schistosomiasis* dengan Nilai Awal $(H_s, H_i, S_s, S_i, C, M) = (300, 150, 300, 200, 200, 150)$

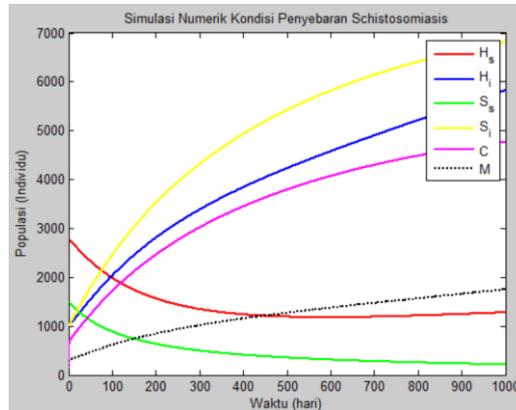
Gambar 4 merupakan hasil simulasi pada saat kondisi bebas penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate*. Jumlah populasi manusia rentan H_s dan populasi siput S_s rentan cenderung naik karena tidak adanya penyebaran penyakit *schistosomiasis*. sementara, Jumlah populasi manusia terinfeksi (H_i), jumlah populasi siput terinfeksi (S_i), jumlah kepadatan *cercaria* (C) serta jumlah kepadatan *miracidia* (M) pada kondisi bebas penyebaran *schistosomiasis* akan cenderung turun hingga akhirnya mengalami kepunahan.

Kondisi penyebaran penyakit *schistosomiasis* terjadi ketika terdapat populasi penyebar *schistosomiasis* atau dengan kata lain ada penyebaran *schistosomiasis* ($R_0 > 1$). Simulasi dilakukan untuk $t = 0$ sampai $t = 1000$ dalam satuan hari. Nilai parameter saat kondisi penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* sebagai berikut:

Tabel 7 Nilai Parameter untuk Menentukan Kestabilan Titik Setimbang Endemik

Parameter	Nilai	Sumber
r_h	0,005	Asumsi
k_1	3000	Asumsi
a_c	0,00001914	[7]
θ_{is}	0,00075	[7]
d_h	0,00003914	[7]
β	0,004	Asumsi
r_s	0,02	Asumsi
k_2	2000	Asumsi
b_m	0,000084	[7]
d_s	0,00033	[7]
γ	0,003	Asumsi
σ	0,7	[7]
d_c	1	[7]
α	0,6	[7]
d_m	2	[7]

Berdasarkan nilai parameter yang diberikan pada Tabel 7, diperoleh $R_0 = 9,334074751 > 1$. Berikut merupakan hasil simulasi numerik saat kondisi penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate*:



Gambar 4 Grafik Simulasi Numerik saat Kondisi Penyebaran Penyakit *Schistosomiasis* dengan Nilai Awal $(H_s, H_i, S_s, S_i, C, M) = (2800, 1000, 1500, 1000, 100, 100)$.

Gambar 4 merupakan hasil simulasi pada populasi manusia saat kondisi penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate*. Jumlah populasi manusia terinfeksi H_i jumlah populasi siput terinfeksi S_i , jumlah kepadatan *cercaria* (C) serta jumlah kepadatan *miracidia* (M) pada kondisi penyebaran *schistosomiasis* akan cenderung naik sebelum akhirnya berada pada keadaan konstan.

6 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika penyebaran penyakit *schistosomiasis* dengan *saturated incidence rate* memiliki dua titik setimbang yaitu titik setimbang non endemik (E_0) dan titik setimbang endemik (E_1). Titik setimbang non endemik akan stabil asimtotis jika $r_h > d_h$, $r_s > d_s$ dan $R_0 < 1$. Titik setimbang endemik (E_1) cenderung stabil asimtotis jika $R_0 > 1$, dengan

$$R_0 = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{(\theta_{is} + d_h)} \left(\frac{\sigma}{d_s}\right) \left(\frac{a_c k_1 (r_h - d_h)}{r_h d_c}\right) \left(\frac{b_m k_2 (r_s - d_s)}{r_s d_m}\right)}$$

2. Berdasarkan hasil simulasi numerik yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa jumlah populasi manusia terinfeksi (H_s), jumlah populasi siput terinfeksi (H_i), jumlah kepadatan *cercaria* (C) serta jumlah kepadatan *miracidia* (M) pada kondisi bebas penyebaran *schistosomiasis* akan cenderung turun hingga akhirnya punah. Lain halnya pada kondisi penyebaran *schistosomiasis*, jumlah keempat populasi tersebut cenderung naik sebelum akhirnya berada pada keadaan konstan.

7 Daftar Pustaka

- [1] World Health Organization (WHO), 2019, *Schistosomiasis*, <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/schistosomiasis>, 24 November 2019.
- [2] Zhang, S., Wang, T., Zhou, Y., Chao, Z., dan Wang, N., 2019, Influence of the Three Gorges Dam on schistosomiasis control in the middle and lower reaches of the Yangtze River, *Global Health Journal*, 3:1-7.
- [3] Departemen Kesehatan Republik Indonesia (Depkes RI), 2016, Schistosomiasis Masih Ada, Butuh Peran Lintas Sektor Bebaskan Indonesia <https://www.depkes.go.id/article/print/1610260002/schistosomiasis-masih-ada-butuh-peran-lintas-sektor-bebaskan-indonesia.html>, 17 November 2019.
- [4] World Health Organization (WHO), 2018, *Schistosomiasis*, <https://www.who.int/news-room/facts-in-pictures/detail/10-facts-on-schistosomiasis>, 15 November 2019.
- [5] Xiang, J., Chen, H., dan Ishikawa, H., 2013, A mathematical model for the transmission of *Schistosoma japonicum* in consideration of seasonal water level fluctuations of Poyang Lake in Jiangxi, China, *Parasitology International*, 62:118-126.
- [6] Ding, C., Tao, N., Sun, Y., dan Zhu, Y., 2016, The effect of time delays on transmission dynamics of schistosomiasis, *Chaos, Solitons and Fractals*, 91:360-371.
- [7] Ding, C., Liu, W., Sun, Y., dan Zhu, Y., 2019, A delayed Schistosomiasis transmission model and its dynamics, *Chaos, Solitons and Fractals*, 118, 18–34.