

Analisis Kestabilan Model Predator-Prey dengan Adanya Faktor Tempat Persembunyian Menggunakan Fungsi Respon Holling Tipe III

Riris Nur Patria Putri¹, Windarto^{2,*}, & Cicik Alfiniyah³

Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga

*Corresponding author: windarto@fst.unair.ac.id

Abstrak. Predation is interaction between predator and prey, where predator preys prey. So predators can grow, develop, and reproduce. In order for prey to avoid predators, then prey needs a refuge. In this thesis, a predator-prey model with refuge factor using Holling type III response function which has three populations, i.e. prey population in the refuge, prey population outside the refuge, and predator population. From the model, three equilibrium points were obtained, those are extinction of the three populations which is unstable, while extinction of predator population and coexistence are asymptotic stable under certain conditions. The numerical simulation results show that refuge have an impact the survival of the prey.

Keywords: Predator-prey model, Refuge, Holling type III, Response Function, Stability

1 Pendahuluan

Biosfer merupakan hal yang penting bagi kehidupan makhluk hidup, yang mana mencakup komponen biotik dan abiotik. Komponen abiotik terdiri dari udara, daratan, air, cahaya, iklim, cuaca, suhu, angin, kelembapan, kandungan mineral, kandungan keasaman, dan salinitas. Sedangkan komponen biotik mencakup semua makhluk hidup yang tinggal di suatu lingkungan, seperti manusia, hewan, tumbuhan, dan mikroorganisme. Dengan adanya komponen-komponen tersebut, sangat memungkinkan terjadi interaksi di dalamnya. Salah satunya adalah interaksi antar sesama komponen biotik, contohnya adalah predasi [1].

Predasi merupakan interaksi antara pemangsa (*predator*) dan mangsa (*prey*), dimana *predator* memangsa *prey*. Dalam predasi, *predator* mengambil energi dari *prey* untuk tumbuh dan bereproduksi, sedangkan *prey* merupakan organisme yang dirugikan atau dikonsumsi oleh *predator* [2]. Jika hal ini terjadi terus-menerus, maka *prey* akan mengalami kepunahan. Adapun cara supaya *prey* terhindar dari kepunahan, salah satunya dengan mencari tempat persembunyian. Tempat persembunyian dapat mempengaruhi dinamika populasi *predator-prey*. Tempat persembunyian *prey* memiliki dampak yang sangat besar terhadap koeksistensi *predator* dan *prey* dengan cara mengurangi kepunahan pada *prey*. Jenis ekosistem ini dapat ditemukan pada ekosistem terumbu karang [3].

Penelitian pemodelan matematika mengenai *predator-prey* telah banyak dilakukan. Kar [4] memodelkan dan menganalisa sistem *prey-predator* dengan memperhatikan adanya

tempat persembunyian mangsa dan pemanenan di kedua spesies. Dubey [5] memodelkan model *predator-prey* dengan memperhatikan adanya area persembunyian yang dilindungi. Wang dkk [6] memodelkan piramida biomassa terbalik dan tempat persembunyian pada ekosistem. Berezovskaya dkk [7] mengamati peran penyebaran mangsa dan tempat persembunyian pada dinamika *predator-prey*. Singh dkk [8] memodelkan struktur biomassa ikan pada terumbu karang yang hampir murni dan degradasi karena adanya penangkapan ikan. Wang dkk [3] meneliti dinamika *predator-prey* dan piramida biomassa dengan faktor tempat persembunyian.

Dari beberapa alasan di atas, penulis ingin melihat bagaimana model *predator-prey* dengan adanya faktor tempat persembunyian menggunakan fungsi respon Holling tipe III dari waktu ke waktu. Selain itu, penulis ingin mengetahui bagaimana titik setimbang yang dihasilkan dari model *predator-prey* tersebut, dan juga ingin mengetahui bagaimana kestabilan dari model *predator-prey* dengan adanya faktor tempat persembunyian menggunakan fungsi respon Holling tipe III di sekitar titik setimbangnya. Adapun batasan masalah yang penulis gunakan dalam penulisan ini yakni penulis hanya memperhatikan model *predator-prey* pada terumbu karang yang ditulis oleh Wang dkk [3]. Sehingga penulis tidak memperhatikan model *predator-prey* populasi hewan lainnya.

2 Model Matematika

Model dasar *predator-prey* ini dirujuk dari artikel ilmiah Wang dkk. [3]. Model *predator-prey* ini memiliki tiga kompartemen, yaitu x_r , x , dan y dimana secara berurutan menunjukkan kepadatan populasi *prey* yang berada di dalam tempat perlindungan, kepadatan populasi *prey* yang berada di luar tempat perlindungan, dan kepadatan populasi *predator*. Dalam kasus ini terdapat beberapa asumsi sebagai berikut:

- a. *Prey* hanya dapat menemukan makanan dan tumbuh di dalam tempat perlindungan, dan kapasitas pendukung merupakan fungsi naik dari ukuran tempat persembunyian.
- b. Pertumbuhan *prey* di dalam tempat perlindungan merupakan pertumbuhan logistik.
- c. Pada saat ketiadaan *prey*, *predator* turun secara eksponensial.
- d. *Predator* hanya dapat memangsa *prey* yang berada di luar tempat perlindungan.
- e. *Prey* dapat migrasi keluar masuk tempat perlindungan, dan hanya laju imigrasi yang bergantung terhadap ukuran tempat perlindungan.
- f. Laju kematian *prey* yang berada di luar tempat persembunyian diabaikan.

Variabel dan parameter yang akan digunakan pada model *predator-prey* dengan adanya faktor tempat persembunyian menggunakan fungsi respon holling tipe III akan diberikan sebagai berikut:

Tabel 1 Definisi Variabel Model *Predator-Prey*

Variabel	Keterangan	Satuan
x_r	Kepadatan populasi <i>prey</i> yang berada di dalam tempat persembunyian	kg/m^3
x	Kepadatan populasi <i>prey</i> yang berada di luar tempat persembunyian	kg/m^3
y	Kepadatan populasi <i>predator</i>	kg/m^3

Tabel 2 Definisi Parameter Model *Predator-Prey*

Parameter	Keterangan	Satuan
a	Laju pertumbuhan per kapita dari <i>prey</i> yang berada di dalam tempat persembunyian	$1/hari$
$K(r)$	Kapasitas pendukung <i>prey</i> di dalam tempat persembunyian yang bergantung terhadap ukuran tempat persembunyian dengan $K(r) = Kr$	kg/m^3
r	Ukuran tempat persembunyian <i>prey</i>	-
α	Laju emigrasi dari tempat persembunyian	$1/hari$
$\beta(r)$	Laju imigrasi ke tempat persembunyian yang bergantung terhadap ukuran tempat persembunyian dengan $\beta(r) = \frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2}$	$1/hari$
γ	Laju maksimum predasi	$\frac{m^6/kg^2}{hari}$
θ	Tingkat kejenuhan <i>predator</i>	m^6/kg^2
c	Nilai konversi <i>prey</i> yang diubah menjadi <i>predator</i>	-
d	Laju kematian per kapita <i>predator</i>	$1/hari$

Pada model *predator-prey* dengan adanya faktor tempat persembunyian menggunakan fungsi respon Holling tipe III diasumsikan nilai variabel $x_r, x, y \geq 0$ dan nilai parameter bernilai positif.

Berikut adalah model *predator-prey* dengan adanya faktor tempat persembunyian yang digunakan pada penulisan ini:

$$\frac{dx_r}{dt} = ax_r \left[1 - \frac{x_r}{Kr} \right] - \alpha x_r + \frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2} x \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x_r - \frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2} x - \frac{\gamma x^2}{1 + \theta x^2} y \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = c \frac{\gamma x^2}{1 + \theta x^2} y - dy \quad (3)$$

3 Analisis Kestabilan Model

Pada bagian ini akan dibahas mengenai analisis kestabilan lokal dari titik setimbang kepunahan ketiga populasi, titik setimbang kepunahan *predator*, serta titik setimbang koeksistensi.

3.1. Titik Setimbang

Berdasarkan Abell dan Braselton [9], titik setimbang merupakan titik pada saat kondisi ketika perubahan jumlah populasi tertentu sepanjang satuan waktu adalah nol. Keadaan setimbang pada model *predator-prey* ini terpenuhi saat $\frac{dx_r}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$.

Titik setimbang kepunahan ketiga populasi merupakan titik setimbang pada saat kondisi populasi *prey* yang berada di dalam tempat persembunyian, populasi *prey* yang berada di luar tempat persembunyian, dan populasi *predator* sepanjang satuan waktu mengalami kepunahan. Kondisi ini artinya $x_r = 0, x = 0, y = 0$. Oleh karena itu, diperoleh titik setimbang $E_0 = (x_{r0}, x_0, y_0) = (0, 0, 0)$.

Titik setimbang kepunahan *predator* merupakan titik setimbang pada saat kondisi populasi *predator* mengalami kepunahan, sehingga tidak adanya *predator* yang memangsa *prey* yang berada di luar tempat persembunyian. Kondisi ini terjadi ketika $x_r \neq 0, x \neq 0, y = 0$. Sehingga dapat dimisalkan titik setimbang kepunahan *predator* adalah $E_1 = (x_{r1}, x_1, y_1) = (x_{r1}, x_1, 0)$. Dari persamaan (1), (2), (3) diperoleh $\frac{dx_r}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$. Sehingga diperoleh titik setimbang kepunahan *predator* $E_1 = (x_{r1}, x_1, y_1) = \left(Kr, \frac{\alpha Kr(\xi^2 + r^2)}{\beta r^2}, 0\right)$.

Titik setimbang koeksistensi merupakan titik setimbang ketika kondisi populasi *prey* yang berada di dalam tempat persembunyian, populasi *prey* yang berada di luar tempat persembunyian, dan populasi *predator* dapat hidup berdampingan dalam suatu ekosistem. Kondisi ini terjadi ketika $x_r \neq 0, x \neq 0, y \neq 0$. Dari persamaan (1), (2), (3) didapatkan $\frac{dx_r}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ sehingga titik setimbang koeksistensi $E_2 = (x_{r2}, x_2, y_2)$ dengan didapat sebagai berikut:

$$x_2 = \sqrt{\frac{d}{c\gamma - d\theta}} \quad (4)$$

$$x_{r2} = Kr \left[\frac{(a - \alpha) + \sqrt{(a - \alpha)^2 + 4 \frac{a\beta r}{K(\xi^2 + r^2)} x_2}}{2a} \right] \quad (5)$$

$$y_2 = \frac{c}{a} \left(\frac{\alpha Kr}{2a} \left[(a - \alpha) + \sqrt{(a - \alpha)^2 + 4 \frac{a\beta r}{K(\xi^2 + r^2)} x_2} \right] - \frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2} x_2 \right) \quad (6)$$

Titik setimbang koeksistensi ada jika $cy - d\theta > 0$, $a - \alpha > 0$, dan

$$\alpha Kr \left[\frac{(a-\alpha) + \sqrt{(a-\alpha)^2 + 4 \frac{\alpha \beta r}{K(\xi^2+r^2)} x_2}}{2a} \right] - \frac{\beta r^2}{\xi^2+r^2} x_2 > 0.$$

3.2. Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Setimbang

Pada bagian ini akan dilakukan analisis kestabilan lokal dari masing-masing titik setimbang. Analisis ini dilakukan untuk mengetahui dinamika perilaku sistem pada model. Analisis kestabilan lokal didekati dengan menggunakan nilai eigen (λ), sehingga kestabilan asimtotis lokal dari model *predator-prey* dengan adanya faktor tempat persembunyian menggunakan fungsi respon Holling tipe III di titik setimbang E_0 , E_1 , dan E_2 dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian. Dari persamaan (1), (2), dan (3) didapatkan Matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} a - \alpha - \frac{2ax_r}{Kr} & \frac{\beta r^2}{\xi^2+r^2} & 0 \\ \alpha & -\frac{\beta r^2}{\xi^2+r^2} - \frac{2\gamma xy[(1+\theta x^2) - \theta x^2 y]}{(1+\theta x^2)^2} & -\frac{\gamma x^2}{1+\theta x^2} \\ 0 & \frac{2c\gamma xy[(1+\theta x^2) - \theta x^2 y]}{(1+\theta x^2)^2} & \frac{c\gamma x^2}{1+\theta x^2} - d \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, akan dianalisis kestabilan dari titik setimbang kepunahan ketiga populasi, kepunahan *predator*, dan koeksistensi.

a. Kestabilan lokal titik setimbang kepunahan ketiga populasi

Matriks Jacobian untuk titik setimbang kepunahan ketiga populasi $E_0 = (x_{r0}, x_0, y_0) = (0, 0, 0)$ adalah sebagai berikut.

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} a - \alpha & \frac{\beta r^2}{\xi^2+r^2} & 0 \\ \alpha & -\frac{\beta r^2}{\xi^2+r^2} & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{bmatrix} \quad (7)$$

Kemudian matriks $J(E_0)$ di atas dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $\det(\lambda I - J(E_0)) = 0$ sebagai berikut.

$$\Leftrightarrow (\lambda + d) \left[(\lambda - a + \alpha) \left(\lambda + \frac{\beta r^2}{\xi^2+r^2} \right) - \frac{\alpha \beta r^2}{\xi^2+r^2} \right] = 0 \quad (8)$$

Berdasarkan persamaan (8), diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -d$ dan akar-akar dari persamaan berikut.

$$\lambda^2 + b_1 \lambda + b_2 = 0 \quad (9)$$

$$b_1 = \alpha - a + \frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2}$$

$$b_2 = -\frac{a\beta r^2}{\xi^2 + r^2}$$

Titik setimbang kepunahan ketiga populasi tersebut akan stabil asimtotis jika dan hanya jika persamaan (9) mempunyai akar-akar bagian real negatif. Dari penjelasan sebelumnya jelas bahwa λ_1 bernilai negatif sebab semua parameter pada model berniali positif. Selanjutnya, akan ditentukan syarat agar persamaan (9) memiliki akar-akar yang bagian realnya negatif, yaitu dengan menggunakan kriteria Routh Hurwitz.

Persamaan karakteristik (9) akan memiliki akar-akar yang bagian realnya negatif jika nilai dari $b_1, b_2 > 0$.

- i. Koefisien b_1 akan bernilai lebih dari nol apabila memenuhi $\alpha + \frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2} > a$.
- ii. Karena semua nilai parameter bernilai positif, maka dapat dipastikan bahwa $b_2 < 0$.

Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa titik setimbang kepunahan ketiga populasi E_0 tidak stabil.

b. Kestabilan lokal titik setimbang kepunahan predator

Matriks Jacobian untuk titik setimbang kepunahan predator $E_1 = (x_{r1}, x_1, 0)$ adalah sebagai berikut.

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -a - \alpha & \frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2} & 0 \\ \alpha & -\frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2} & -\frac{\gamma(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2}{(\beta r^2)^2 + \theta(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2} \\ 0 & 0 & \frac{c\gamma(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2}{(\beta r^2)^2 + \theta(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2} - d \end{bmatrix} \quad (10)$$

Kemudian matriks $J(E_1)$ di atas dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $\det(\lambda I - J(E_1)) = 0$ sebagai berikut.

$$\Leftrightarrow \left[\lambda - \frac{c\gamma(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2}{(\beta r^2)^2 + \theta(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2} + d \right] \left[(\lambda + a + \alpha) \left(\lambda + \frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2} \right) - \frac{\alpha\beta r^2}{\xi^2 + r^2} \right] = 0 \quad (11)$$

Berdasarkan persamaan (11), diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = \frac{c\gamma(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2}{(\beta r^2)^2 + \theta(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2} - d$ dan akar-akar dari persamaan berikut.

$$\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0 \quad (12)$$

$$b_1 = \alpha + a + \frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2}$$

$$b_2 = \frac{a\beta r^2}{\xi^2 + r^2}$$

Titik setimbang kepunahan *predator* tersebut akan stabil asimtotis jika dan hanya jika persamaan (12) mempunyai akar-akar bagian real negatif. Karena semua nilai parameter bernilai positif, maka dari penjelasan sebelumnya nilai λ_1 akan bernilai negatif apabila $\frac{c\gamma(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2}{(\beta r^2)^2 + \theta(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2} < d$. Selanjutnya, akan ditentukan syarat agar persamaan (12) memiliki akar-akar yang bagian realnya negatif, yaitu dengan menggunakan kriteria Routh Hurwitz.

Persamaan karakteristik (12) akan memiliki akar-akar yang bagian realnya negatif jika nilai dari $b_1, b_2 > 0$.

- i. Karena semua nilai parameter bernilai positif, maka dapat dipastikan bahwa $b_1 > 0$.
- ii. Karena semua nilai parameter bernilai positif, maka dapat dipastikan bahwa $b_2 > 0$.

Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa titik setimbang kepunahan *predator* E_1 stabil asimtotis jika $\frac{c\gamma(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2}{(\beta r^2)^2 + \theta(\alpha Kr(\xi^2 + r^2))^2} < d$.

c. Kestabilan lokal titik setimbang koeksistensi

Matriks Jacobian untuk titik setimbang koeksistensi $E_2 = (x_{r_2}, x_2, y_2)$ adalah sebagai berikut.

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} a - \alpha - \frac{2ax_r}{Kr} & \frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2} & 0 \\ \alpha & -\frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2} - \frac{2\gamma xy[(1+\theta x^2) - \theta x^2 y]}{(1+\theta x^2)^2} & -\frac{\gamma x^2}{1+\theta x^2} \\ 0 & \frac{2c\gamma xy[(1+\theta x^2) - \theta x^2 y]}{(1+\theta x^2)^2} & \frac{c\gamma x^2}{1+\theta x^2} - d \end{bmatrix} \quad (13)$$

Dengan menggunakan kondisi kesetimbangan koeksistensi di dapat matriks $J(E_2)$ sebagai berikut:

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} a - \alpha - \frac{2ax_r}{Kr} & \frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2} & 0 \\ \alpha & -\frac{\beta r^2}{\xi^2 + r^2} - \frac{2\gamma xy[(1+\theta x^2) - \theta x^2 y]}{(1+\theta x^2)^2} & -\frac{d}{c} \\ 0 & \frac{2c\gamma xy[(1+\theta x^2) - \theta x^2 y]}{(1+\theta x^2)^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Kemudian matriks $J(E_2)$ di atas dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $\det(\lambda I - J(E_2)) = 0$ sebagai berikut:

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0 \quad (15)$$

$$b_1 = \frac{1}{Krx_r x(\xi^2 + r^2)(1 + \theta x^2)^2} (Kar^3\theta^2 x_r^2 x^4 + K\beta r^3\theta^2 x^6 - Kr^3\gamma\theta x_r x^4 y + 2Kar^3\theta x_r^2 x^2 + 2Kr^3\beta\theta x^4 + Kr^3\gamma x_r x^2 y + Kar^3 x_r^2 + K\beta r^3 x^2 + ar^2\theta^2 x_r^2 x^5 + 2ar^2\theta x_r^2 x^3 + ar^2 x_r^2 x + 2Kar\theta\xi^2 x_r^2 x^2 + Kar\theta^2\xi^2 x_r^2 x^4 - Kr\gamma\theta\xi^2 x_r x^4 y + Kr\gamma\xi^2 x_r x^2 y + Kar\xi^2 x_r^2 + a\theta^2\xi^2 x_r^2 x^5 + 2a\theta\xi^2 x_r^2 x^3 + a\xi^2 x_r^2 x)$$

$$b_2 = \frac{1}{Krx_r x(\xi^2 + r^2)(1 + \theta x^2)^2} (Kar^3\beta\theta^2 x_r x^5 - Kr^3\alpha\beta\theta^2 x_r x^5 - Kr^3\beta\gamma\theta x^5 y + 2Kar^3\beta\theta x_r x^3 - 2Kr^3\alpha\beta\theta x_r x^3 + Kr^3\beta\gamma x^3 y + 2Kdr^3\gamma x_r x^2 y + Kar^3\beta x_r x - Kr^3\alpha\beta x_r x + a^2 r^2\theta^2 x_r^3 x^4 - ar^2\gamma\theta x_r^2 x^4 y + 2a^2 r^2\theta x_r^3 x^2 + ar^2\gamma x_r^2 x^2 y + a^2 r^2 x_r^3 + 2Kdr\gamma\xi^2 x_r x^2 y + a^2\theta^2\xi^2 x_r^3 x^4 - a\gamma\theta\xi^2 x_r^2 x^4 y + 2a^2\theta\xi^2 x_r^3 x^2 + a\gamma\xi^2 x_r^2 x^2 y + a^2\xi^2 x_r^3)$$

$$b_3 = \frac{1}{Krx_r(\xi^2 + r^2)(1 + \theta x^2)^2} (2d\gamma xy(Kr^3\beta x + ar^2 x_r^2 + a\xi^2 x_r^2))$$

Titik setimbang koeksistensi akan stabil asimtotis jika dan hanya jika persamaan (15) mempunyai akar-akar bagian real negatif. Selanjutnya, akan ditentukan syarat agar persamaan memiliki akar-akar yang bagian realnya negatif, yaitu dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Persamaan karakteristik (15) akan memiliki akar-akar yang bagian real negatif jika nilai dari $b_1, b_2, b_3, (b_1 b_2 - b_3) > 0$.

i. Agar memenuhi $b_1 > 0$, maka harus memenuhi syarat adalah sebagai berikut:

$$Kar^3\theta^2 x_r^2 x^4 + K\beta r^3\theta^2 x^6 + 2Kar^3\theta x_r^2 x^2 + 2Kr^3\beta\theta x^4 + Kr^3\gamma x_r x^2 y + Kar^3 x_r^2 + K\beta r^3 x^2 + ar^2\theta^2 x_r^2 x^5 + 2ar^2\theta x_r^2 x^3 + ar^2 x_r^2 x + 2Kar\theta\xi^2 x_r^2 x^2 + Kar\theta^2\xi^2 x_r^2 x^4 + Kr\gamma\xi^2 x_r x^2 y + Kar\xi^2 x_r^2 + a\theta^2\xi^2 x_r^2 x^5 + 2a\theta\xi^2 x_r^2 x^3 + a\xi^2 x_r^2 x > Kr^3\gamma\theta x_r x^4 y + Kr\gamma\theta\xi^2 x_r x^4 y$$

ii. Syarat agar $b_2 > 0$ adalah sebagai berikut:

$$Kar^3\beta\theta^2 x_r x^5 + 2Kar^3\beta\theta x_r x^3 + Kr^3\beta\gamma x^3 y + 2Kdr^3\gamma x_r x^2 y + Kar^3\beta x_r x + a^2 r^2\theta^2 x_r^3 x^4 + 2a^2 r^2\theta x_r^3 x^2 + ar^2\gamma x_r^2 x^2 y + a^2 r^2 x_r^3 + 2Kdr\gamma\xi^2 x_r x^2 y + a^2\theta^2\xi^2 x_r^3 x^4 + 2a^2\theta\xi^2 x_r^3 x^2 + a\gamma\xi^2 x_r^2 x^2 y + a^2\xi^2 x_r^3 > Kr^3\alpha\beta\theta^2 x_r x^5 + Kr^3\beta\gamma\theta x^5 y + 2Kr^3\alpha\beta\theta x_r x^3 + Kr^3\alpha\beta x_r x + ar^2\gamma\theta x_r^2 x^4 y + a\gamma\theta\xi^2 x_r^2 x^4 y$$

iii. Karena $x_r, x, y > 0$ dan nilai parameter bernilai positif, maka $b_3 > 0$.

Dalam menentukan syarat $(b_1 b_2 - b_3) > 0$ untuk menentukan kestabilan titik setimbang koeksistensi sulit untuk dilakukan secara analitik, maka dilakukan secara numerik

menggunakan software MATLAB. Simulasi ini dilakukan dengan memberi nilai parameter dan empat nilai awal untuk $x_r(0)$, $x(0)$, dan $y(0)$ yang diketahui. Berikut adalah tabel nilai awal dan nilai parameter yang digunakan. Simulasi ini hanya dilakukan pada waktu $t = 0$ sampai $t = 50000$ hari.

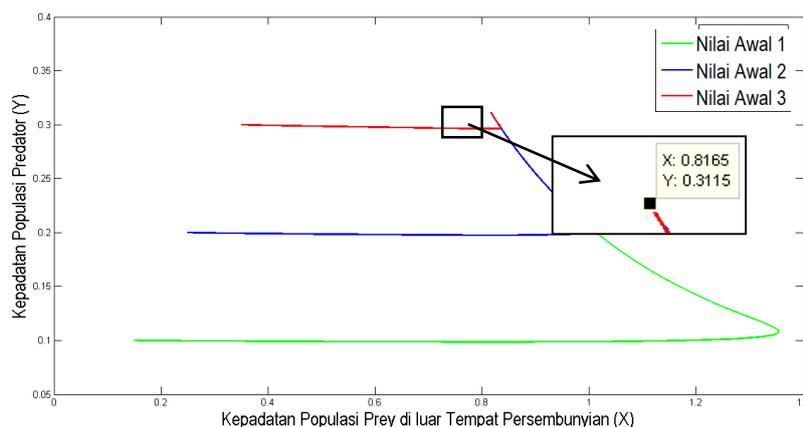
Tabel 3 Nilai Awal untuk Bidang Fase Koeksistensi

Nilai Awal	$x_r(0)$	$x(0)$	$y(0)$	Warna
1	0,20	0,15	0,10	Hijau
2	0,30	0,25	0,20	Biru
3	0,40	0,35	0,30	Merah

Tabel 4 Nilai Parameter Model *Predator-Prey* Saat Kondisi Koeksistensi

Parameter	Nilai Parameter	Sumber
a	0,6	Asumsi
K	0,8	Wang dkk (2018)
r	1	Asumsi
α	0,035	Wang dkk (2018)
β	0,0119	Wang dkk (2018)
γ	0,112	Asumsi
c	0,01	Asumsi
d	0,0007	Asumsi
ξ	1	Asumsi
θ	0,1	Asumsi

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3, berikut ini adaah simulasi bidang fase antara kepadatan populasi *prey* yang berada di luar tempat persembunyian dan kepadatan populasi *predator* selama rentang waktu 50000 hari.



Gambar 1 Grafik Bidang Fase $x(t)$ dan $y(t)$ pada Titik Setimbang E_2

Pada Gambar 1 adalah grafik bidang fase kepadatan populasi *prey* yang berada di dalam tempat persembunyian dan kepadatan populasi *predator* pada model *predator-prey* dengan adanya faktor tempat persembunyian menggunakan fungsi respon Holling tipe III dengan syarat E_2 . Berdasarkan gambar tersebut dengan ketiga nilai awal yang digunakan menunjukkan bahwa semua grafiknya cenderung menuju titik setimbang koeksistensi, yaitu titik (0,8165 ; 0,3115) dengan kata lain grafik tersebut konvergen. Dengan demikian model tersebut stabil asimtotis pada titik setimbang koeksistensi.

3.3. Simulasi Numerik

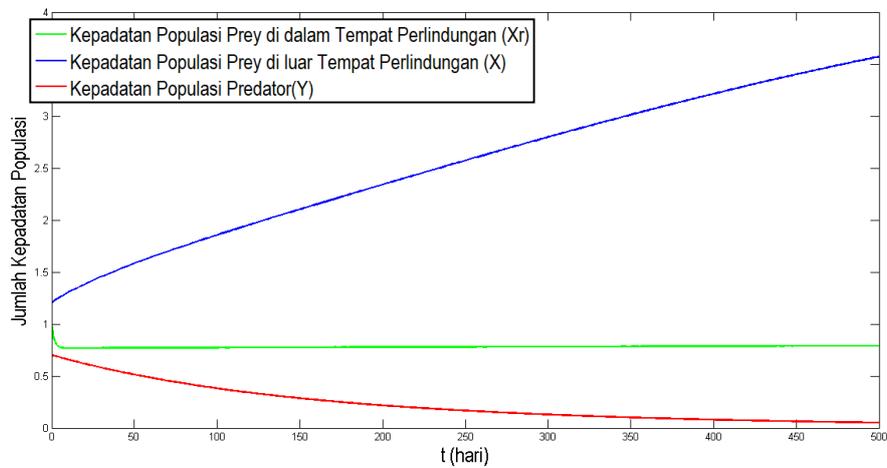
Pada bagian ini dibahas mengenai simulasi numerik dan interpretasi model *predator-prey* dengan adanya faktor tempat persembunyian menggunakan fungsi respon Holling tipe III. Simulasi ini bertujuan untuk mengetahui dinamika populasi antara populasi *prey* yang berada di dalam tempat persembunyian, populasi *prey* yang berada di luar tempat persembunyian, dan populasi *predator* pada selang waktu tertentu.

Simulasi titik setimbang kepunahan predator merupakan simulasi numerik model *predator-prey* dengan adanya faktor tempat persembunyian menggunakan fungsi respon Holling tipe III yang memenuhi kondisi kestabilan titik setimbang kepunahan predator (E_1). Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi disajikan pada Tabel 5 dengan nilai awal $x_r(0) = 0,30$, $x(0) = 0,20$, dan $y(0) = 0,50$ selama 500 hari.

Tabel 5 Nilai Parameter Model *Predator-Prey* Saat Kondisi Kepunahan *Predator*

Parameter	Nilai Parameter	Sumber
a	0,6	Asumsi
K	0,8	Wang dkk (2018)
r	1	Asumsi
α	0,035	Wang dkk (2018)
β	0,0119	Wang dkk (2018)
γ	0,0112	Wang dkk (2018)
c	0,04	Wang dkk (2018)
d	0,007	Asumsi
ξ	1	Asumsi
θ	0,1	Asumsi

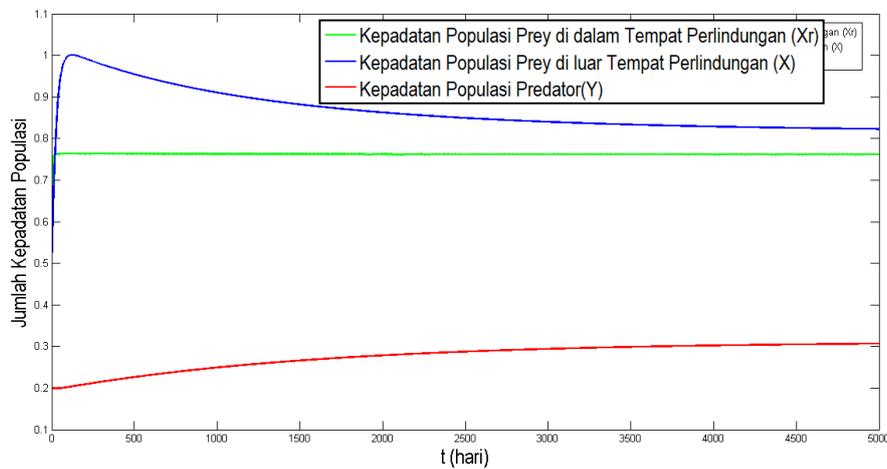
Berikut hasil simulasi yang menggambarkan dinamika populasi antara populasi *prey* yang berada di dalam tempat persembunyian, populasi *prey* yang berada di luar tempat persembunyian, dan populasi *predator*:



Gambar 2 Dinamika *Predator-Prey* Saat Kondisi Kepunahan *Predator*

Simulasi titik setimbang koeksistensi merupakan simulasi numerik model *predator-prey* dengan adanya faktor tempat persembunyian menggunakan fungsi respon Holling tipe III yang memenuhi kondisi kestabilan titik setimbang koeksistensi (E_2). Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi disajikan pada Tabel 4 dengan nilai awal $x_r(0) = 0,40$, $x(0) = 0,50$, dan $y(0) = 0,20$ selama 5000 hari.

Berikut hasil simulasi yang menggambarkan dinamika populasi antara populasi *prey* yang berada di dalam tempat persembunyian, populasi *prey* yang berada di luar tempat persembunyian, dan populasi *predator*:



Gambar 3 Grafik Dinamika *Predator-Prey* Saat Kondisi Koeksistensi

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada pembahasan, dapat disimpulkan bahwa titik setimbang kepunahan bersifat tidak stabil, sedangkan titik setimbang kepunahan *predator*

dengan syarat $\frac{c\gamma(\alpha Kr(\xi^2+r^2))^2}{(\beta r^2)^2+\theta(\alpha Kr(\xi^2+r^2))^2} < d$ dan titik setimbang koeksistensi dengan syarat

$$\text{koeksistensi } c\gamma - d\theta > 0, a - \alpha > 0, \alpha Kr \left[\frac{(a-\alpha) + \sqrt{(a-\alpha)^2 + 4\frac{a\beta r}{K(\xi^2+r^2)}x_2}}{2a} \right] - \frac{\beta r^2}{\xi^2+r^2} x_2 > 0$$

bersifat stabil asimtotis. Hasil simulasi numerik pada saat kesetimbangan kepunahan *predator*, kepadatan populasi *prey* yang berada di luar tempat persembunyian meningkat. Sedangkan pada saat kesetimbangan koeksistensi, kepadatan populasi *prey* yang berada di luar tempat persembunyian meningkat hingga pada waktu tertentu, lalu menurun hingga pada waktu tertentu dan selanjutnya cenderung konstan.

Referensi

- [1] Kistinnah, I., dan Lestari, E.S., 2006. *Biologi Makhluk Hidup dan Lingkungannya*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional
- [2] Stevens, A.N.P., <https://www.nature.com/scitable>, 3 Oktober 2018
- [3] Wang, H., Thanarajah, S., dan Gaudreau, P., 2018, Refuge-Mediated Predator-Prey Dynamics and Biomass Pyramids, *Mathematical Biosciences*, 298, 29-45
- [4] Kar, T. K., 2006, Modelling and Analysis of A Harvested Prey-Predator System Incorporating A Prey Refuge, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 185, 19-33
- [5] Dubey, B., 2007, A Prey-Predator Model with a Reserved Area, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 12, 279-494
- [6] Wang, H., Morrison, W., Singh, A., dan Weiss, H., 2009, Modeling Inverted Biomass Pyramids and Refuges in Ecosystems, *Ecological Modelling*, 220, 1376-1382
- [7] Berezovskaya, F. S., Song, B., dan Castillo-Chavez, C., 2010, Role of Prey Dispersal and Refuges On Predator-Prey Dynamics, *SIAM J. Appl. Math.*, 70, 1821-1839
- [8] Singh, A., Wang, H., Morrison, W.M., dan Weiss, H., 2012, Modeling Fish Biomass Structure at Near Pristine Coral Reefs and Degradation by Fishing, *Journal of Biological Systems*, 20, 21-36
- [9] Abell, M. dan Braselton, J., 2004, *Differential Equations with Mathematica*, Third Edition, USA: Elsevier Academic Press