Contemporary Mathematics and Applications
Vol. 4, No. 1, 2022, pp. 1-14.

Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Hasil Operasi *Comb* Graf Bintang

A. I. Kristiana[1,*], S. Indriani [1] & E.R Albirri[1]

[1]Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember

*Corresponding author : arika.fkip@unej.ac.id

Abstract. Let $G(V,E)$ is a simple graph and connected where $V(G)$ is vertex set and $E(G)$ is edge set. An inclusive local irregularity vertex coloring is defined by a mapping $l: V(G) \to \{1,2,\dots,k\}$ as vertex labeling and $w^i: V(G) \to N$ is function of inclusive local irregularity vertex coloring, with $w^i(v) = l(v) + \sum_{u \in N(v)} l(u)$. In other words, an inclusive local irregularity vertex coloring is to assign a color to the graph with the resulting weight value by adding up the labels of the vertices that are neighbouring to its own label. The minimum number of colors produced from inclusive local irregularity vertex coloring of graph G is called inclusive chromatic number local irregularity, denoted by $\chi_{lis}^{i}(G)$. In this paper, we learn about the inclusive local irregularity vertex coloring and determine the chromatic number of comb product on star graph.

Keywords: *An Inclusive Local Irregularity Vertex Coloring, Comb Product On Star Graph*

1 Pendahuluan

Sebuah graf didefinisikan sebagai pasangan terurut dari $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang berhingga dan boleh kosong serta setiap sisi menghubungkan dua titik. Dari definisi tersebut, sebuah graf dapat terbentuk apabila terdapat minimal satu titik saja dan tidak harus memiliki sisi [1]. Semua graf yang digunakan pada penelitian ini merupakan graf sederhana dan terhubung.

Pewarnaan graf merupakan pemberian warna pada setiap elemen pada graf sedemikian sehingga setiap elemen graf yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Terdapat tiga macam pewarnaan pada graf yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Jumlah warna minimum yang dihasilkan dari pewarnaan disebut dengan bilangan kromatik [2].

Pewarnaan ketakteraturan lokal merupakan penggabungan dari konsep pelabelan dan pewarnaan titik pada graf. Hal ini dilakukan dengan cara meminimumkan label titik pada graf. Pelabelan graf merupakan suatu cara untuk memberikan label pada setiap elemen yang terdapat dalam suatu graf yaitu titik, sisi, atau keduanya. Kristiana, dkk dalam [3] mendefinisikan ketakteraturan lokal, misalkan $l: V(G) \rightarrow \{1,2,..,k\}$ merupakan fungsi label dan $w: V(G) \rightarrow N$ merupakan fungsi bobot. Kristiana, dkk juga mendapatkan bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf lintasan, graf bintang, dan graf lingkaran [3]. Selain itu, graf yang telah diteliti yaitu graf roda [4], graf buku segitiga, graf *pan,* graf buku persegi, graf *grid* [5] dan graf hasil operasi *comb* graf bintang [6].

Pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif merupakan pengembangan konsep dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal dimana bobot titik yang dihasilkan dengan menjumlahkan titik-titik yang bertetangga dan titik dirinya sendiri. Berbeda dengan pewarnaan titik ketakteraturan lokal yang bobot titiknya hanya didapatkan melalui penjumlahan titik-titik yang bertetangga saja. Pewarnaan dilakukan seminimal mungkin sedemikian sehingga titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. A.I Kristiana dkk (2020) [7] telah mendefinisikan tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif sebagai berikut:

Definisi 1.1 [7] *Diberikan* $l: V(G) \rightarrow \{1,2,..,k\}$ *adalah fungsi label dan* $w^i: V(G) \rightarrow N$ *adalah fungsi bobot pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif dengan*$w^i(v) = l(v) + \sum_{u \in N(v)} l(u)$. *Pelabelan* l *dikatakan sebagai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif jika :*

(i) $Opt(l) = min\{max\{l_a\}\}$; l_a *adalah pelabelan titik ketakteraturan lokal inklusif*
(ii) Untuk setiap titik $uv \in E(G), w^i(u) \neq w^i(v)$.

Definisi 1.2 [7] *Jumlah warna minimum yang dihasilkan dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif sebuah graf G disebut bilangan kromatik titik ketakteraturan lokal inklusif, dinotasikan dengan* $\chi_{lis}^{i}(G)$.

Definisi 1.3 [8] *Jumlah warna minimum yang dihasilkan dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal sebuah graf G disebut bilangan kromatik titik ketakteraturan lokal, dinotasikan dengan* $\chi_{lis}(G)$.

Pada artikel ini, untuk memudahkan dalam menemukan pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada sebuah graf maka akan digunakan definisi, lemma, proposisi, dan observasi sebagai berikut :

Lemma 1.1 [7] *Diberikan graf G adalah graf sederhana dan terhubung, maka* $\chi_{lis}^{i}(G) \geq \chi_{lis}(G)$

Observasi 1.1 *Suatu graf* G *dengan derajat titik yang berbeda memiliki optimal pelabelan* $opt(l) = 1$.

Observasi 1.2 *Misalkan graf* G *dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan* $opt(l) \geq 2$.

Preposisi 1.1 [8] *Misalkan* (S_m) *adalah graf bintang dengan order* $m+1$ *dan* (S_n) *adalah graf bintang dengan order* $n+1$, *untuk* $m \geq 3$ *dan* $n \geq 3$ *dengan titik pelekatan (titik tempel) dari graf bintang* (S_n) *berderajat* n, *maka* $\chi_{lis}(S_m \rhd_o \ S_n) = 3$.

Preposisi 1.2 [6] *Misalkan* $(K_{m,p})$ *dan* (S_n) *adalah graf komplit bipartite dan graf bintang. Untuk setiap* $m, p \geq 2$ *dan* $n \geq 3$ *dengan titik pelekatan (titik tempel) dari graf bintang* (S_n) *berderajat* n, *maka* $\chi_{lis}\left(K_{m,p} \rhd_o \ S_n\right) = 3$.

Preposisi 1.3 [6] *Misalkan* (Fr_m) *dan* (S_n) *adalah graf persahabatan dan graf bintang. Untuk setiap* $m \geq 2$ *dan* $n \geq 3$ *dengan titik pelekatan (titik tempel) dari graf bintang* (S_n) *berderajat* n, *maka* $\chi_{lis}(Fr_m \rhd_o \ S_n) = 4$.

Penelitian ini menggunakan graf hasil operasi comb dengan graf bintang. Operasi *comb* graf adalah operasi yang akan digunakan pada penelitian ini. Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan *o* adalah titik pusat dari H [11]. Pada operasi *comb* graf, graf G dan H dinotasikan dengan $G \rhd_o H$ merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf G, dengan $|V(G)|$ merupakan salinan dari H, yang meletakkan titik *o* dengan masing–masing salinan graf H ke–*i* terhadap titik ke–*i* dari sebuah graf G.

Pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif juga tergolong topik yang baru dan masih banyak graf yang belum diteliti pada topik ini sehingga peneliti melakukan penelitian tentang topik ini dengan graf yang berbeda. A.I Kristiana dkk [7] telah melakukan penelitian terkait pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada beberapa graf sederhana, yang meliputi graf lintasan, graf lingkaran dan graf bintang. Penelitian tersebut menjadi penelitian awal mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif yang kemudian dilanjutkan oleh penelitian lain yaitu U.A Anwar dkk [9] yang meneliti mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada keluarga graf pohon dan A. Maarif dkk [10] yang meneliti mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada graf kipas (F_n), graf petasan $(F_{n,4})$,dan graf matahari (SL_n).

2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode pendeteksi pola dan metode deduksi aksiomatik. Metode pendeteksi pola digunakan untuk merumuskan pola dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada beberapa graf yang akan diteliti sedangkan metode deduksi aksiomatik digunakan dengan menerapkan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma, lemma, dan teorema yang sudah ada kemudian diterapkan dalam penyelesaian dari suatu permasalahan yang berkaitan dengan pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif.

3 Hasil dan Pembahasan

Dalam artikel ini, kami membahas bilangan kromatik titik ketakteraturan lokal inklusif pada hasil operasi *comb* graf bintang yaitu $(S_m \triangleright_o \quad S_n), \left(K_{m,p} \triangleright_o \quad S_n\right)$, dan $(Fr_m \triangleright_o \quad S_n)$ sehingga menghasilkan teorema yang terurai sebagai berikut:

Teorema 3.1 *Misalkan* (S_m) *adalah graf bintang dengan order* $m+1$ *dan* (S_n) *adalah graf bintang dengan order* $n+1$, *untuk* $m \geq 3$ *dan* $n \geq 3$ *dengan titik pelekatan dari graf bintang* (S_n) *berderajat* n, *maka bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf* $S_m \triangleright_o \quad S_n$ *adalah* $\chi_{lis}^i(S_m \triangleright_o \quad S_n) = 3$.

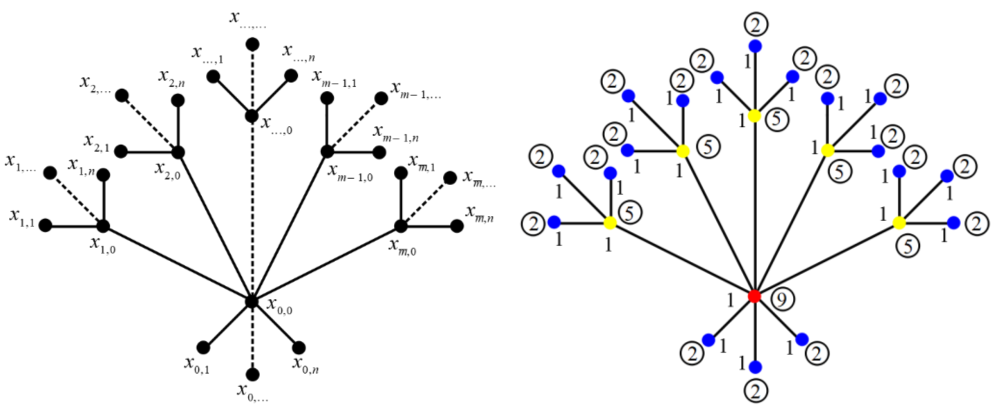
Bukti. Diketahui graf $(S_m \triangleright_o \quad S_n)$ adalah graf bintang (S_m) dengan order $m+1$ dan (S_n) adalah graf bintang dengan order $n+1$. Himpunan titik dari graf $(S_m \triangleright_o \quad S_n)$ adalah $V(S_m \triangleright_{v_0} S_n) = \{x_{i,j}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$. Himpunan sisi dari graf $(S_m \triangleright_{v_0} S_n)$ adalah $E(S_m \triangleright_{v_0} S_n) = \{x_{0,0}x_{i,0}, 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i,0}x_{i,j}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{0,0}x_{0,j}, 1 \leq j \leq n\}$. Sehingga didapatkan kardinalitas titiknya yaitu $|V(S_m \triangleright_{v_0} S_n)| = (m+1)(n+1)$ dan kardinalitas sisinya yaitu $|E(S_m \triangleright_o S_n)| = m(n+1)+n$. Apabila setiap $v(S_m \triangleright_o \quad S_n)$ dilabeli dengan 1, maka akan didapatkan bobot dari titik yang bertetangga $w^i(x_{i,0})$ dan $w^i(x_{i,j})$ yaitu:

$$w^i(x_{i,0}) = l(x_{i,0}) + l(x_{0,0}) + l(x_{i,j}) = 3$$
$$w^i(x_{i,j}) = l(x_{0,0}) + l(x_{i,j}) = 2$$

Perhitungan bobot diatas didapatkan setiap titik yang bertetangga pada graf $(S_m \triangleright_o \quad S_n)$ memiliki derajat yang berbeda. Berdasarkan Observasi 1.1, maka didapatkan $opt(l) = 1$. Selanjutnya untuk membuktikan $\chi_{lis}^i(S_m \triangleright_o \quad S_n) = 3$. Berdasarkan Lemma 1.1 dan Preposisi 1, batas bawah dari bilangan kromatik titik ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(S_m \triangleright_o S_n)$ adalah $\chi_{lis}^i(S_m \triangleright_o S_n) \geq \chi_{lis}(S_m \triangleright_o S_n) = 3$. Kemudian batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(S_m \triangleright_o S_n)$ didefiniskan $l: V(S_m \triangleright_o S_n) = \{1\}$ dengan $l(x_{i,j}) = 1$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, sehingga diperoleh perhitungan bobot titik ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(S_m \triangleright_o S_n)$ sebagai berikut.

$$w^i(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } 0 \le i \le m, 1 \le j \le n \\ n+2, & \text{untuk } 1 \le i \le m, j = n \\ m+n+1, & \text{untuk } i = 0, j = 0 \end{cases}$$

Dari perhitungan bobot titik ketakteraturan lokal inklusif didapatkan, $\left|w^i(S_m \rhd_o S_n)\right| = 3$ untuk $m \ge 3$ dan $n \ge 3$ sebagai batas atas dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif. Dalam hal ini telah didapatkan batas bawah melalui Preposisi 1.1 dan batas atas melalui fungsi bobot maka diketahui bahwa $3 = \chi_{lis}^i(S_m \rhd_o S_n) \ge \chi_{lis}(S_m \rhd_o S_n) = 3$. Berdasarkan Definisi 1.1 tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif graf $(S_m \rhd_o S_n)$ untuk $m \ge 3$ dan $n \ge 3$ adalah 3 atau $\chi_{lis}^i(S_m \rhd_o S_n) = 3$. Maka pembuktian telah selesai.



(a) (b)

Gambar 1 a) Graf $(\boldsymbol{S_m} \rhd_{\mathbf{o}} \boldsymbol{S_n})$, (b) Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Graf $(\boldsymbol{S_5} \rhd_{\mathbf{o}} \boldsymbol{S_3})$

Gambar 1 di atas merupakan gambar graf $(S_m \rhd_o S_n)$ yang telah diberi pelabelan, perhitungan bobot dan pewarnaannya. Gambar 1 (a) merupakan gambar graf $(S_m \rhd_o S_n)$ secara umum dan Gambar 1 (b) merupakan salah satu contoh gambar graf $S_5 \rhd_o S_3$ yang telah dilakukan pelabelan dan perhitungan bobot warnanya.

Teorema 3.2 *Misalkan* $(K_{m,p})$ *dan* (S_n) *adalah graf komplit bipartite dan graf bintang. Untuk setiap* $m, p \ge 2$ *dan* $n \ge 3$ *dengan titik pelekatan dari graf bintang* (S_n) *berderajat* n*, maka bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf* $K_{m,p} \rhd_o S_n$ *adalah*

$$\chi_{lis}^{i}(K_{m,p} \rhd_o S_n) = \begin{cases} 3, & untuk\ m \neq p, n \geq 3 \\ 4, & untuk\ m = p, n \geq 3 \end{cases}.$$

Bukti. Diketahui graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ adalah graf komplit bipartite dan graf bintang. Untuk setiap $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ dengan titik pelekatan dari graf bintang (S_n) berderajat n. Himpunan titik dari graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ adalah $V(K_{m,p} \rhd_{v_0} S_n) = \{x_{i,j}, 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}, 1 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq n\}$. Himpunan sisi pada graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ adalah $E(K_{m,p} \rhd_o S_n) = \{x_{i,0}x_{i,j}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p\} \cup \{x_{i,0}y_{j,0}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,0}y_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\}$.Sehingga kita dapatkan kardinalitas titiknya yaitu $|V(K_{m,p} \rhd_o S_n)| = m + p(n+1)$ dan didapat kardinalitas sisinya yaitu $|E(K_{m,p} \rhd_o S_n)| = mp + n(m+p)$. Pada pembuktian teorema ini terdapat dua kasus bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ yaitu ketika $m \neq p$ dan $m = p$ sebagai berikut.

Kasus 1. Untuk $m \neq p$ dengan $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$

Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif $\chi_{lis}^{i}(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ untuk $m \neq p$ dengan $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah 3. Apabila setiap $v(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ dilabeli dengan 1, maka akan didapatkan bobot dari titik yang bertetangga $w^i(x_{i,0})$ dan $w^i(y_{i,0})$ yaitu :

$$w^i(x_{i,0}) = l(x_{i,0}) + \sum_{j=1}^{n} l(x_{i,j}) + \sum_{i=1}^{p} l(y_{i,0}) = 1 + n + p$$
$$w^i(y_{i,0}) = l(y_{i,0}) + \sum_{j=1}^{n} l(y_{i,j}) + \sum_{i=1}^{m} l(x_{i,0}) = 1 + n + m$$

Diketahui $m \neq p$ sehingga didapatkan setiap titik yang bertetangga pada graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ untuk $m \neq p$ memiliki derajat yang berbeda. Berdasarkan Observasi 1.1, maka didapatkan $opt(l) = 1$. Untuk membuktikan $\chi_{lis}^{i}(K_{m,p} \rhd_o S_n) = 3$. Berdasarkan Lemma 1.1 dan Preposisi 1.2, batas bawah dari bilangan kromatik titik ketakteraturan lokal inklusif graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ untuk $m \neq p$ didapatkan $\chi_{lis}^{i}(K_{m,p} \rhd_o S_n) \geq \chi_{lis}(K_{m,p} \rhd_o S_n) = 3$. Kemudian batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ dengan $m \neq p$ untuk $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ didefiniskan $l: V(K_{m,p} \rhd_o S_n) = \{1\}$. Pelabelan titk ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ dengan $m \neq p$ untuk $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah sebagai berikut.

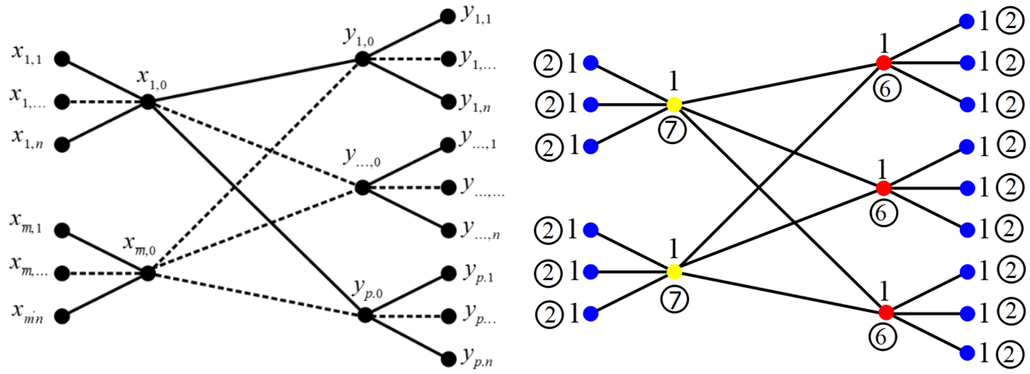
$$l(x_{i,j}) = 1$$
$$l(y_{i,j}) = 1$$

Perhitungan bobot titik ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ dengan $m \neq p$ untuk $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ yang didapatkan dari penjumlahan label yang bertetangga dengan label dirinya sendiri adalah sebagai berikut.

$$w^i(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \\ 1+n+p, & \text{untuk } 1 \leq i \leq m, j = 0 \end{cases}$$

$$w^i(y_{i,j}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n \\ 1+n+m, & \text{untuk } 1 \leq i \leq p, j = 0 \end{cases}$$

Dari perhitungan bobot titik di atas didapatkan $|w^i(K_{m,p} \rhd_o S_n)| = 3$ dengan $m \neq p$ untuk $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ sebagai batas atas dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ dengan $m \neq p$ untuk $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$. Sehingga telah didapatkan batas bawah melalui Preposisi 1.2 dan batas atas melalui fungsi bobot, maka diketahui bahwa $3 = \chi^i_{lis}(K_{m,p} \rhd_o S_n) \geq \chi_{lis}(K_{m,p} \rhd_o S_n) = 3$. Berdasarkan Definisi 1.1 tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ dengan $m \neq p$ untuk $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah 3 atau $\chi^i_{lis}(K_{m,p} \rhd_o S_n) = 3$. Pembuktian pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$dengan $m \neq p$ untuk $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ telah selesai.



(a) (b)

Gambar 2 (a) Graf $(\boldsymbol{K_{m,p} \rhd_o S_n})$, (b) Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Graf $(\boldsymbol{K_{m,p} \rhd_o S_n})$

Gambar 2 merupakan gambar graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ yang telah diberi pelabelan, perhitungan bobot dan pewarnaannya. Gambar 2 (a) merupakan gambar graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ secara umum dan Gambar 2 (b) merupakan salah satu contoh gambar graf $(K_{2,3} \triangleright_o S_3)$ yang telah dilakukan pelabelan dan perhitungan bobot warnanya.

Kasus 2. Untuk $m = p$ dengan $m, p \geq 2\ dan\ n \geq 3$

Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif $\chi_{lis}^i(K_{m,p} \triangleright_o S_n)$untuk $m = p$ dengan $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah 4. Apabila setiap $v(K_{m,p} \triangleright_o S_n)$dilabeli dengan 1, maka akan didapatkan bobot dari titik yang bertetangga $w^i(x_{i,0})$ dan $w^i(y_{i,0})$ yaitu :

$$w^i(x_{i,0}) = l(x_{i,0}) + \sum_{j=1}^{n} l(x_{i,j}) + \sum_{i=1}^{p} l(y_{i,0}) = 1 + n + p$$
$$w^i(y_{i,0}) = l(y_{i,0}) + \sum_{j=1}^{n} l(y_{i,j}) + \sum_{i=1}^{m} l(x_{i,0}) = 1 + n + m.$$

Diketahui $m = p$ sehingga didapatkan setiap titik yang bertetangga pada graf $(K_{m,p} \triangleright_o S_n)$untuk $m = p$ memiliki derajat yang sama. Hal tersebut kontradiksi dengan Definisi 1.2 tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif dimana setiap titik yang bertetangga $uv \in E(G)$ tidak boleh sama. Berdasarkan Observasi 1.2, maka optimum pelabelan graf $(K_{m,p} \triangleright_o S_n)$untuk $m \neq p$ didapatkan $opt(l) \geq 2$.

Selanjutnya untuk membuktikan $\chi_{lis}^i(K_{m,p} \triangleright_o S_n) = 4$. Berdasarkan Lemma 1.1 dan Preposisi 1.2, batas bawah dari bilangan kromatik titik ketakteraturan lokal inklusif didapatkan $\chi_{lis}^i(K_{m,p} \triangleright_o S_n) \geq \chi_{lis}(K_{m,p} \triangleright_o S_n) = 3$ untuk $m = p$. Kemudian batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(K_{m,p} \triangleright_o S_n)$dengan $m = p$ untuk $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ didefiniskan $l: V(K_{m,p} \triangleright_o S_n) = \{1,2\}$. Pelabelan titk ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(K_{m,p} \triangleright_o S_n)$dengan $m = p$ untuk $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$.

Apabila $v(K_{m,p} \triangleright_o S_n)$dengan $m = p$ untuk $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ dilabeli dengan $\{1,2\}$ secara berturut-turut maka pelabelan titiknya seperti berikut.

$$l(x_{i,j}) = 1, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$$

$$l(y_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n \\ 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq p, j = 0 \end{cases}$$

Bobot titik yang diperoleh dari penjumlahan label titik yang bertetangga dengan dirinya sendiri yaitu sebagai berikut.

$$w^i(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \\ 1+n+2p, & \text{untuk } 1 \le i \le m, j = 0 \end{cases}$$
$$w^i(y_{i,j}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } 1 \le i \le p, 1 \le j \le n \\ 2+m+n, & \text{untuk } 1 \le i \le p, j = 0 \end{cases}$$

Dari perhitungan bobot titik di atas didapatkan $\left|w^i\left(K_{m,p} \rhd_o S_n\right)\right| = 4$ dengan $m = p$ untuk $m, p \ge 2$ dan $n \ge 3$. Nilai bilangan kromatik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif graf $\left(K_{m,p} \rhd_o S_n\right)$ dengan $m = p$ untuk $m, p \ge 2$ dan $n \ge 3$ tidak sama dengan batas bawah $\chi_{lis}\left(K_{m,p} \rhd_o S_n\right) = 3$. Akan dibuktikan batas bawah untuk bilangan kromatik sama dengan 3 tidak berlaku. Asumsikan bahwa $\chi_{lis}^i\left(K_{m,p} \rhd_o S_n\right) = 3$, yang artinya akan terdapat 3 warna dari hasil pewarwanaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada graf $\left(K_{m,p} \rhd_o S_n\right)$ dengan $m = p$ untuk $m, p \ge 2$ dan $n \ge 3$. Apabila setiap titik dilabeli dengan 1 dan 2, maka akan didapatkan kemungkinan bobot titik pada graf $\left(K_{m,p} \rhd_o S_n\right)$ dengan $m = p$ untuk $m, p \ge 2$ dan $n \ge 3$.

Tabel 1 Kemungkinan Bobot Titik $\boldsymbol{\left(K_{m,p} \rhd_o S_n\right)}$ dengan $\boldsymbol{m = p}$

$v\left(K_{m,p} \rhd_o S_n\right)$	$d(v)$	$w^i(v)$
$x_{i,j}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$	1	$2 \le w^i(x_{i,j}) \le 3$
$y_{i,j}, 1 \le i \le p, 1 \le j \le n$	1	$3 \le w^i(y_{i,j}) \le 4$
$x_{i,0,} 1 \le i \le m, j = 0$	$n + p$	$m + n + p \le w^i\left(x_{i,j}\right) \le 2n + 2p + 2m$
$y_{i,0,} 1 \le i \le p, j = 0$	$n + m$	$m + n + p \le w^i\left(y_{i,j}\right) \le 2n + 2p + 2m$

Diketahui $m = p$, jika $\left(x_{i,0}\right)$ untuk $1 \le i \le m, j = 0$ dan $\left(y_{i,0,}\right)$ untuk $1 \le i \le p, j = 0$ adalah titik yang bertetangga memiliki derajat yang sama yaitu $n + p$ dan $n + m$. Sehingga akan didapatkan beberapa kemungkinan label titik yang berderajat $n + p$ dan $n + m$ yaitu 1,1,1,…,1 pada titik n . Apabila m dan p dilabeli dengan 1 atau 2 pada titik $\left(x_{i,0}\right)$ dan $\left(y_{i,0}\right)$ sehingga akan didapatkan beberapa kemungkinan bobot titik sebagai berikut.

a. Untuk $l\left(x_{i,0}\right) = 1$, $l\left(y_{i,0}\right) = 1$ dengan $n = 1$ diperoleh $w^i\left(x_{i,0}\right) = w^i\left(y_{i,0}\right) = 1 + n + m$, dengan $m = p$
b. Untuk $l\left(x_{i,0}\right) = 2$, $l\left(y_{i,0}\right) = 2$ dengan $n = 1$ diperoleh $w^i\left(x_{i,0}\right) = w^i\left(y_{i,0}\right) = 2 + n + 2m$, dengan $m = p$

Berdasarkan pernyataan di atas, tidak mungkin titik yang bertetangga memiliki bobot titik yang sama. Hal ini kontradiksi dengan Definisi 1.1 tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif karena $x_{i,0}y_{i,0} \in E(K_{m,p} \rhd_o S_n)$, sehingga $w^i(x_{i,0}) \neq w^i(y_{i,0})$.

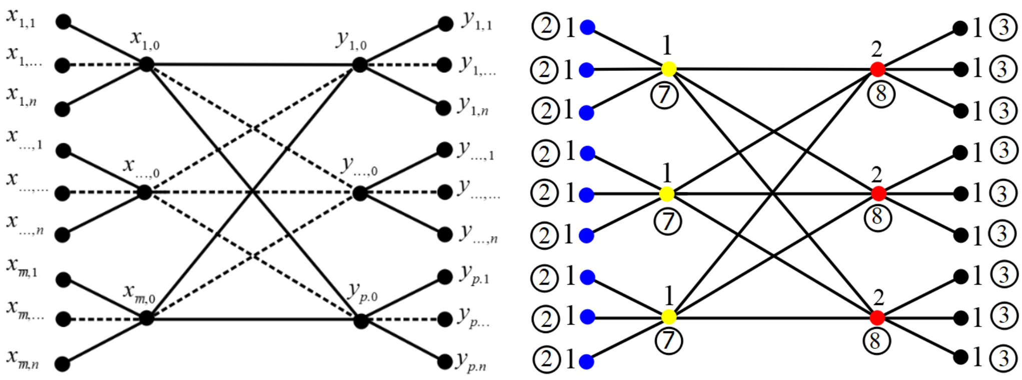
Apabila $(x_{i,0})$ untuk $1 \leq i \leq m, j = 0$ dan $(y_{i,0,})$ untuk $1 \leq i \leq p, j = 0$ adalah titik yang bertetangga memiliki derajat yang sama yaitu $n + p$ dan $n + m$. Asumsikan titik $(x_{i,j})$ dan $(y_{i,j})$untuk $1 \leq i \leq m, p;\ 1 \leq j \leq m, p$ dilabeli dengan 1,1,1,1,1,…1. Apabila m dan p dilabeli dengan 1 dan 2 pada titik $(x_{i,0})$ dan $(y_{i,0})$ sehingga akan didapatkan beberapa kemungkinan bobot titik sebagai berikut.

a. Untuk $l(x_{i,0}) = 1$, $l(y_{i,0}) = 2$ dengan $n = 1$ diperoleh $w^i(x_{i,0}) \neq w^i(y_{i,0})$
b. Untuk $l(x_{i,j}) = 1$, $l(x_{i,0}) = 1$ dengan $p = 2$ diperoleh $w^i(x_{i,j}) \neq w^i(x_{i,0})$
c. Untuk $l(y_{i,j}) = 1$, $l(y_{i,0}) = 2$ dengan $m = 1$ diperoleh $w^i(y_{i,j}) \neq w^i(y_{i,0})$
d. Untuk $l(x_{i,j}) = 1$, $l(y_{i,j}) = 2$ dengan $m, p = 1$ diperoleh $w^i(x_{i,j}) \neq w^i(y_{i,0})$

Asumsikan $\chi^i_{lis}(K_{m,p} \rhd_o S_n) = 4$ untuk $m = p$ dengan $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ maka terdapat 4 warna pada graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$. Titik yang berderajat $n + p$ bertetangga dengan titik yang berderajat 1, jika mengikuti pola pelabelan yang telah ditetapkan didapatkan bobot titik yang berderajat 1 yaitu :

$$w^i(x_{i,j}) = 2, \text{ untuk } l(x_{i,j}) = 1 \text{ dan } l(x_{i,0}) = 1$$
$$w^i(y_{i,j}) = 3, \text{ untuk } l(y_{i,j}) = 1 \text{ dan } l(y_{i,0}) = 2$$

Dari pernyataan di atas, titik yang berderajat 1 memiliki 2 bobot titik yang berbeda. Jadi batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif graf $(K_{m,p} \rhd_o S_n)$ untuk $m = p$ dengan $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah $\chi^i_{lis}(K_{m,p} \rhd_o S_n) \geq 4$. Berdasarkan batas atas dan batas bawah bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif, didapatkan $4 \leq \chi^i_{lis}(K_{m,p} \rhd_o S_n) \leq 4$, sehingga terbukti bahwa $\chi^i_{lis}(K_{m,p} \rhd_o S_n) = 4$ untuk $m = p$ dengan $m, p \geq 2$ dan $n \geq 3$.



(a) (b)

Gambar 3 (a) Graf $\left(\boldsymbol{K_{m,p} \triangleright_o S_n}\right)$, (b) Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Graf $\left(\boldsymbol{K_{3,3} \triangleright_o S_3}\right)$

Gambar 3 merupakan gambar graf $\left(K_{m,p} \triangleright_o S_n\right)$ yang telah diberi pelabelan, perhitungan bobot dan pewarnaannya. Gambar 3 (a) merupakan gambar graf $\left(K_{m,p} \triangleright_o S_n\right)$ secara umum dan Gambar 3 (b) merupakan salah satu contoh gambar graf $\left(K_{3,3} \triangleright_o S_3\right)$ yang telah dilakukan pelabelan dan perhitungan bobot warnanya.

Teorema 3.3 *Misalkan* (Fr_m) *dan* (S_n) *adalah graf persahabatan dan graf bintang. Untuk setiap* $m \geq 2$ *dan* $n \geq 3$ *dengan titik pelekatan dari graf bintang* (S_n) *berderajat* n*, maka bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf* $Fr_m \triangleright_o S_n$ *adalah* $\chi_{lis}^{i}(Fr_m \triangleright_o S_n) = 4$.

Bukti. Diketahui graf $(Fr_m \triangleright_o S_n)$ adalah graf persahabatan dan graf bintang untuk setiap $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ dengan titik pelekatan dari graf bintang (S_n) berderajat n. Himpunan titik dari graf $(Fr_m \triangleright_o S_n)$ adalah $V(Fr_m \triangleright_o S_n) = \{x_{i,j}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi dari graf $(Fr_m \triangleright_o S_n)$ adalah $E(Fr_m \triangleright_o S_n) = \{x_{0,0}x_{i,0}, 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{x_{i,0}x_{i+1}, i \in odd, 1 \leq i \leq 2m-1\} \cup \{x_{i,0}x_{i,j}, 0 \leq i \leq 2m, 0 \leq j \leq n\}$.
Kardinalitas titiknya yaitu $|V(Fr_m \triangleright_o S_n)| = 2m(n+1) + n + 1$ dan kardinalitas sisinya yaitu $|E(Fr_m \triangleright_o S_n)| = 3m + n(2m+1)$. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif $\chi_{lis}^{i}(Fr_m \triangleright_o S_n)$ untuk setiap $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah 4. Apabila setiap $v(Fr_m \triangleright_o S_n)$ dilabeli dengan 1, maka akan didapatkan bobot dari titik yang bertetangga $w^i(x_{i,0})$ dan $w^i(x_{i+1,0})$ yaitu:

$$w^i(x_{i,0}) = l(x_{i,0}) + l(x_{i+1,0}) + l(x_{0,0}) + \sum_{j=1}^{n} l(x_{i,j}) = 3 + n$$

$$w^i(x_{i+1,0}) = l(x_{i+1,0}) + l(x_{i,0}) + l(x_{0,0}) + \sum_{j=1}^{n} l(x_{i+1,j}) = 3 + n$$

Diketahui kedua titik yang bertetangga $w^i(x_{i,0})$ dan $w^i(x_{i+1,0})$ pada graf $(Fr_m \rhd_o S_n)$ untuk setiap $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ memiliki bobot titik yang sama. Hal tersebut kontradiksi dengan Definisi 1.1 tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif dimana setiap titik yang bertetangga $uv \in E(G)$ tidak boleh sama. Berdasarkan Observasi 1.2, maka optimum pelabelan graf $(Fr_m \rhd_o S_n)$ untuk setiap $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ didapatkan $opt(l) \geq 2$.

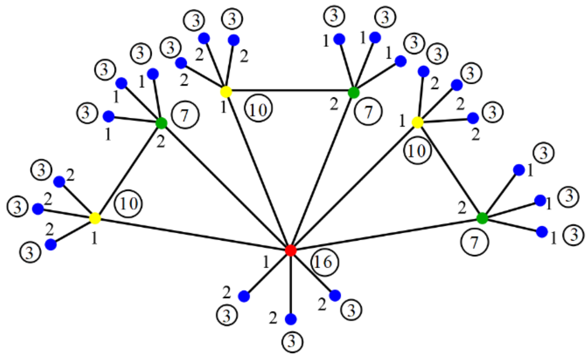
Selanjutnya untuk membuktikan $\chi_{lis}^i(Fr_m \rhd_o S_n) = 4$. Berdasarkan Lemma 1.1 dan Preposisi 1.3, batas bawah dari bilangan kromatik titik ketakteraturan lokal inklusif didapatkan $\chi_{lis}^i(Fr_m \rhd_o S_n) \geq \chi_{lis}(Fr_m \rhd_o S_n) = 4$ untuk setiap $m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Kemudian batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(Fr_m \rhd_o S_n)$ untuk setiap $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ didefiniskan $l: V(Fr_m \rhd_o S_n) = \{1,2\}$. Pelabelan titik ketakteraturan lokal inklusif pada graf $(Fr_m \rhd_o S_n)$ untuk setiap $m \geq 2$ dan $n \geq 3$.

$$l(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 0, j = 0 \\ 1, & \text{untuk } i = ganjil, 1 \leq i \leq 2m, j = 0 \\ 1, & \text{untuk } i = genap, 1 \leq i \leq 2m, 1 \leq j \leq n \\ 2, & \text{untuk } i = 0, 1 \leq j \leq n \\ 2, & \text{untuk } i = ganjil, 1 \leq i \leq 2m, 1 \leq j \leq n \\ 2, & \text{untuk } i = genap, 1 \leq i \leq 2m, j = 0 \end{cases}$$

Bobot titik yang diperoleh dari penjumlahan label titik yang bertetangga dengan dirinya sendiri yaitu sebagai berikut.

$$w^i(x_{i,j}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \\ n + 4, & \text{untuk } i = genap, 1 \leq i \leq 2m, j = 0 \\ 2n + 4, & \text{untuk } i = ganjil, 1 \leq i \leq 2m, j = 0 \\ 3m + 2n + 1, & \text{untuk } i = 0, j = 0 \end{cases}$$

Dari perhitungan bobot titik ketakteraturan lokal inklusif didapatkan, $|w^i(Fr_m \rhd_o S_n)| = 4$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ sebagai batas atas dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif. Dalam hal ini telah didapatkan batas bawah melalui Preposisi 3 dan batas atas melalui fungsi bobot maka diketahui bahwa $4 = \chi_{lis}^{i}(Fr_m \rhd_o S_n) \geq \chi_{lis}(Fr_m \rhd_o S_n) = 4$. Berdasarkan Definisi 1.1 yaitu tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif graf $(Fr_m \rhd_o S_n)$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah 4 atau $\chi_{lis}^{i}(Fr_m \rhd_o S_n) = 4$. Maka pembuktian telah selesai.



Gambar 4 Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Graf $(\boldsymbol{Fr_3} \rhd_{\mathbf{o}} \boldsymbol{S_3})$

Gambar 4 merupakan gambar graf $(Fr_m \rhd_o S_n)$ secara umum sedangkan untuk Gambar 5 merupakan salah satu contoh gambar graf $Fr_3 \rhd_o S_3$ yang telah dilakukan pelabelan dan perhitungan bobot warnanya.

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, telah diperoleh 3 bilangan kromatik baru mengenai topik pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada hasil operasi *comb* graf bintang yaitu :

(i) $\chi_{lis}^{i}(S_m \rhd_o S_n) = 3$,

(ii) $\chi_{lis}^{i}(K_{m,p} \rhd_o S_n) = \begin{cases} 3, & untuk\ m \neq p, n \geq 3 \\ 4, & untuk\ m = p, n \geq 3 \end{cases}$

(iii) $\chi_{lis}^{i}(Fr_m \rhd_o S_n) = 4$

5 Ucapan Terima kasih

Kami mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas dukungan dari LP2M dan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember Indonesia tahun 2022.

6 Daftar Pustaka

[1] Hartsfield, N. and G. Ringel. 1990. *Pearls in Graph Theory A Comprehensive Introduction.* New York: Academic Press, Inc.

[2] Dafik. 2015. Teori Graf, Aplikasi dan Tumbuhnya Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. *Pidato Pengukuhan Guru Besar.* Jember: Pidato Ilmiah Pengukuhan Profesor di Lingkungan UNEJ. Mei.

[3] Kristiana.A.I., Dafik, Utoyo, M. I., Slamin, Alfarisi, R., Agustin, I. H., dan M. Venkatachalam. 2019. Local Irregularity Vertex Coloring of Graphs. *International Journal of Civil Engineering and Technology*. 10(4):451-461.

[4] Kristiana.A.I., Dafik, Agustin I. h., Utoyo, R.Alfarisi, dan Waluyo E. 2019. On The Chromatic Number Local Irregularity of Related Wheel Graph. *IOP Conf. Series : Journal of Physics.* Conf. Series. 1211.0120003.

[5] N Azahra, Kristiana A.I., Dafik, dan R Alfarisi. 2020. On the Local Irregularity Vertex Coloring of Related Grid Graph. *International Journal of Academic and Applied Research (IJAAR)* 1-4.

[6] Mursyidah, I.L., Dafik, R. Adawiyah, A.I. Kristiana dan I.H. Agustin. 2020. On Local Irregularity Vertex Coloring of Comb Product on Star Graphs. *Journal of Physics : Conference Series.* 1836 012023.

[7] Kristiana.A.I., Dafik, R.Alfarisi, U.A.Anwar, dan S.M.Citra. 2020. An Inclusive Local Irregularity Coloring Of Graphs. *Advances in Mathematics: Scientific Journal.* 10:8941-8946.

[8] Mursyidah, I.L., Dafik, R. Adawiyah, A.I. Kristiana, dan R. Alfarisi. 2021. On The Local Irregularity Vertex Coloring of Comb Product by Path Graph and Star Graph. *Discrete Mathematics, Algoritms and Aplication.*

[9] Anwar, U. A., A.I. Kristiana, A. Fatahillah, Dafik, dan R. Alfarisi. 2021. Pewarnaan Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Keluarga Graf Pohon Tree. *Journal of Mathematics and Applications*. 2(1): 24-30.

[10] Maarif, A., Halim, M. G., Indriani, S., Kristiana, A. I., & Alfarisi, R. (2021). *Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Graf Kipas, Graf Petasan (n,4) dan Graf Matahari.* 15(10), 8946.

[11] R. Ramdani. 2019. On The Total Vertex Irregularity Strength of Comb Product of Two Cycles and Two Stars. *Indonesian Journal of Combinatorics.* 3(2):79-94.