Contemporary Mathematics and Applications
Vol. 4, No. 1, 2022, pp. 15-27.

Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Keluarga Graf *Unicyclic*

A. I. Kristiana[1,*], M. G. Halim[1] & R. Adawiyah[1]

[1]Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember

*Corresponding author : arika.fkip@unej.ac.id

Abstract. The graph in this paper is a simple and connected graph with $V(G)$is vertex set and $E(G)$ is edge set. An inklusif local irregularity vertex coloring is defined should be maping $l:V(G)\to\{1,2,...,k\}$ as vertex labeling and $w^i:V(G)\to N$ is function of inclusive local irregularity vertex coloring, with $w^i(v)=l(v)+\Sigma_{u\in N(v)}l(u)$. in other words, an inclusive local irregularity vertex coloring is to assign a color to the graph with the resulting weight value by adding up the labels of the vertices that are should be neighboring to its own label. The minimum number of colors produced from inclusive local irregularity vertex coloring of graph G is called inclusive chromatic number local irregularity, denoted by $\chi^i_{lis}(G)$. Should be in this paper, we learn about the inclusive local irregularity vertex coloring and determine the chromatic number on unicyclic graphs.

Keywords: *graph, an inclusive local irregularity vertex coloring, unicyclic graphs.*

1 Pendahuluan

Sebuah graf didefinisikan sebagai himpunan terurut dari (V,E)dimana V adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut titik dan E adalah himpunan sisi yang berhingga dan boleh kosong serta setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda di V [6]. Salah satu teori graf yang saat ini terus dikembangkan yaitu pewarnaan pada graf. Pewarnaan pada graf adalah pemberian warna pada elemen yang terdapat pada graf dimana pada penelitian ini yaitu titik, sedemikian sehingga titik-titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. jumlah warna minimum yang dihasilkan dalam pewarnaan graf disebut dengan bilangan kromatik [1]. ada beberapa kasus khusus dalam pewarnaan graf salah satunya adalah pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif.

Pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif merupakan perkembangan dari konsep pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Pada pewarnaan titik ketakteraturan lokal, bobot titik dihasilkan melalui penjumlahan label titik-titik yang bertetangga dengan titik yang akan dicari bobotnya. Pada pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif, bobot titik dihasilkan melalui penjumlahan titik-titik yang bertetangga dengan titik dirinya sendiri. Pewarnaan dilakukan seminimal mungkin sedemikian sehingga titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda [3]. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pertama kali dikemukakan oleh A.I Kristiana dkk (2020) dan telah didapatkan definisi tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif sebagai berikut:

Definisi 1 [4] *Diberikan* $l: V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ *adalah fungsi label dan* $w^i : V(G) \to N$ *adalah fungsi bobot pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif dengan* $w^i(v) = l(v) + \sum_{u \in N(v)} l(u)$. *Pelabelan dikatakan sebagai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif jika :*

(i) $Opt(l) = \min\{\max\{l_a\}\}; l_a$ *; adalah pelabelan titik ketakteraturan lokal inklusif*

(ii) Untuk setiap titik $uv \in E(G), w^i(u) \neq w^i(v)$.

Definisi 2 [3] *Jumlah warna minimum yang dihasilkan dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif sebuah graf G diseut bilangan kromatik titik ketakteraturan lokal inklusif, dinotasikan dengan* $\chi^i_{lis}(G)$.

Untuk memudahkan dalam menemukan pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada penelitian ini, maka akan digunakan lemma, proposisi, dan observasi sebagai berikut:

Lemma 1 [3] *Diberikan graf G adalah graf sederhana dan terhubung, maka* $\chi^i_{lis}(G) \geq \chi_{lis}(G)$

Proposisi 1 [5] *Graf cricket* $(Cr_{m,n})$ *didapatkan melalui penggabungan graf lingkaran berorder m dengan* $m \geq 3$ *dengan graf tunggal yang memiliki dua sisi pada satu titik yang terdapat pada graf lingkaran. Graf tunggal berorder n dengan* $n \geq 3$. *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket* $(Cr_{m,n})$ *adalah* $\chi_{lis}(Cr_{m,n}) = 4$.

Proposisi 2 [5] *Graf tadpole* $(T_{m,n})$ *merupakan hasil penggabungan dari graf lingkaran berorder m dengan* $m \geq 3$ *dan graf lintasan berorder n dengan* $n \geq 3$ *di titik* x_1 *pada lingkaran. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole* $(T_{m,n})$ *adalah* $\chi_{lis}(T_{m,n}) = 4$.

Observasi 1 *Graf peach* (C_n^m) *merupakan gabungan dari graf lingkaran berorder m dengan* $m \geq 3$ *dan pendant berorder n dengan* $n \geq 4$ *yang terletak di titik* x_1 *pada* *lingkaran. Bilangan kromatik ketakteraturan local graf peach* $\left(C_n^m\right)$ *adalah* $\chi_{lis}\left(C_n^m\right)=3$.

A.I. Kristiana dkk telah melakukan penelitian terkait pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada beberapa graf sederhana, yang meliputi graf lintasan, graf lingkaran dan graf bintang [3]. Penelitian tersebut menjadi penelitian awal mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif yang kemudian dilanjutkan oleh penelitian lain yaitu U.A Anwar dkk [7] yang meneliti mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada keluarga graf pohon dan Maarif A. dkk [4] yang meneliti mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada graf kipas, graf petasan, dan graf matahari.

Keluarga graf *unicylic* adalah gabungan dari graf-graf terhubung dan hanya memiliki satu siklus saja. Graf siklus merupakan graf lintasan berorder *n* dengan sisi yang menghubungkan titik ke *n* dengan titik awal. Graf siklus biasa disebut dengan graf lingkaran. Graf *unicylic* memiliki keunikan tersendiri dimana jumlah titik dan sisi yang sama pada setiap grafnya [2].

Mengingat bahwa penelitian mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif masih tergolong penelitian baru sehingga masih banyak jenis graf yang belum diteliti. Maka dari itu, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada keluarga graf *unicyclic* yang meliputi graf *cricket,* graf *tadpole,* dan graf *peach.*

2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan beberapa metode pendukung diantaranya yaitu metode pendeteksi pola dan metode deduksi aksiomatik. Perumusan pola untuk setiap graf yang diteliti, diolah menggunakan metode pendeteksi pola sedangkan untuk metode deduksi aksiomatik digunakan dengan menerapkan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika. Dalam penelitian ini, menggunakan beberapa lemma, dan proposisi yang sudah ada kemudian diterapkan dalam penyelesaian dari suatu permasalahan yang berkaitan dengan pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif.

3 Hasil dan Pembahasan

Dalam artikel ini, kami membahas bilangan kromatik titik ketakteraturan lokal inklusif pada keluarga graf *unicyclic* yang meliputi graf *cricket*, graf *tadpole*, graf *peach*, graf *net*, graf *bull* dan menghasilkan teorema yang terurai sebagai berikut

Theorem 1. *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf cricket* $\left(Cr_{m,n}\right)$ *dengan* $m \geq 4$ *dan* $n \geq 4$ *adalah*

$$\chi_{lis}^{i}\left(Cr_{m,n}\right)=\begin{cases}4, & m\ gasal, n\geq 4\\ 5, & m\ genap, n\geq 4\end{cases}$$

Bukti. Diketahui Graf $\left(Cr_{m,n}\right)$ adalah graf *cricket* memiliki himpunan titik $V\left(G\right)=$ $\left\{x_i;1\leq i\leq m\right\}\cup\left\{y_j;1\leq j\leq n\right\}$ dan himpunan sisi $E\left(G\right)=\left\{x_ix_{i+1};1\leq i\leq m-1\right\}\cup\left\{x_mx_1\right\}\cup$ $\left\{x_1y_2\right\}\cup\left(x_ny_2\right)\cup\left\{y_jy_{j+1};1\leq i\leq n-1\right\}$. Sehingga kardinalitas titik dan sisi berturut-turut yaitu $\left|V\left(G\right)\right|=m+n$ dan $\left|E\left(G\right)\right|=m+n$. Terdapat dua kasus penyelesaian bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *cricket* $\left(Cr_{m,n}\right)$ dengan $m\geq 4\,dan\ n\geq 4$ sebagai berikut.

Kasus 1. Untuk *m* gasal dan $n\geq 4$

Misalkan graf *cricket* yaitu untuk *m* gasal dan $n\geq 4$. Akan dibuktikan batas atas dan batas bawah melalui pelabelan. Diambil sampel pelabelan untuk titik-titik bertetangga memiliki bobot yang sama apabila dilabeli dengan 1 yaitu $w^i\left(x_{i+1}\right)=l\left(x_i\right)+\ l\left(x_{i+1}\right)+l\left(x_{i+2}\right)=3$ dan $w^i\left(x_{i+2}\right)=l\left(x_{i+1}\right)\ +l\left(x_{i+2}\right)+l\left(x_{i+3}\right)=3$. Kondisi ini bertentangan dengan Definisi dimana $w^i\left(x_i\right)\neq w^i\left(x_{i+1}\right)$ sehingga dalam pembuktian kasus ini $opt(l)\geq 2$. Berdasarkan Lemma 1 dan Proposisi 1 diketahui bahwa batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dari graf *cricket* adalah $\chi_{lis}^{i}\geq\chi_{lis}=4$ sedangkan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif didefinisikan dengan $l:V\left(Cr_{m,n}\right)\rightarrow\{1,2\}$. Berikut adalah pelabelan yang dihasilkan pada graf *cricket* $\left(Cr_{m,n}\right)$

$$l\left(x_i\right)=\begin{cases}1, & untuk\ i\ gasal\\ 2, & untuk\ i\ genap\end{cases}$$

$$l\left(y_i\right)=\begin{cases}1, & untuk\ i\ gasal\\ 2, & untuk\ i\ genap\end{cases}$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh dari penjumlahan label yang bertetangga dengan label dirinya sendiri adalah sebagai berikut.

$$w^i(x_i) = \begin{cases} 5, \ untuk\ i\ gasal \\ 4, untuk\ i\ genap \end{cases}$$

$$w^i(y_i) = \begin{cases} 3, untuk\ i = 1,\ i = n \\ 4,\ untuk\ i = genap \\ 5,\ untuk\ i = gasal \\ 6, \quad untuk\ i = 2 \end{cases}$$

Berdasarkan perhitungan bobot di atas didapatkan $\left|w\left(Cr_{m,n}\right)\right| = 4$. Berdasarkan batas bawah melalui Proposisi 1 dan batas atas melalui pelabelan di atas didapatkan $4 = \chi_{lis}^i \geq \chi_{lis} = 4$. Sehingga berdasarkan Definisi 1 mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inlusif didapatkan bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *cricket* dengan *m* gasal dan $n \geq 4$ adalah 4.

Kasus 2. Untuk *m* genap dan $n \geq 4$

Misalkan graf *cricket* yaitu untuk *m* genap dan $n \geq 4$. Akan dibuktikan batas atas dan batas bawah melalui pelabelan. Diambil sampel pelabelan untuk titik-titik bertetangga memiliki bobot yang sama apabila dilabeli dengan 1 dan 2 yaitu $w^i\left(x_{i+1}\right) = l\left(x_i\right) + l\left(x_{i+1}\right) + l\left(x_{i+2}\right) = 3$ dan $w^i\left(x_{i+2}\right) = l\left(x_{i+1}\right) + l\left(x_{i+2}\right) + l\left(x_{i+3}\right) = 3$. Dua titik tersebut memiliki bobot titik yang sama, sedangkan diketahui bahwa titik x_{i+1} dan x_{i+2} adalah dua titik bertetangga. Kondisi ini bertentangan dengan Definisi 1 dimana $w^i\left(x_{i+1}\right) \neq w^i\left(x_{i+2}\right)$ sehingga dalam pembuktian kasus ini $opt(l) \geq 2$. Berdasarkan Lemma 1 dan Proposisi 1 diketahui bahwa batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dari graf *cricket* adalah $\chi_{lis}^i \geq \chi_{lis} = 4$. Batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif didefinisikan dengan $l : V\left(Cr_{m,n}\right) \rightarrow \{1, 2, 3\}$. Berikut adalah pelabelan yang dihasilkan pada graf *cricket* $\left(Cr_{m,n}\right)$

$$l(x_i) = \begin{cases} 1,\ untuk\ i\ gasal \\ 2, untuk\ i\ genap \end{cases}$$

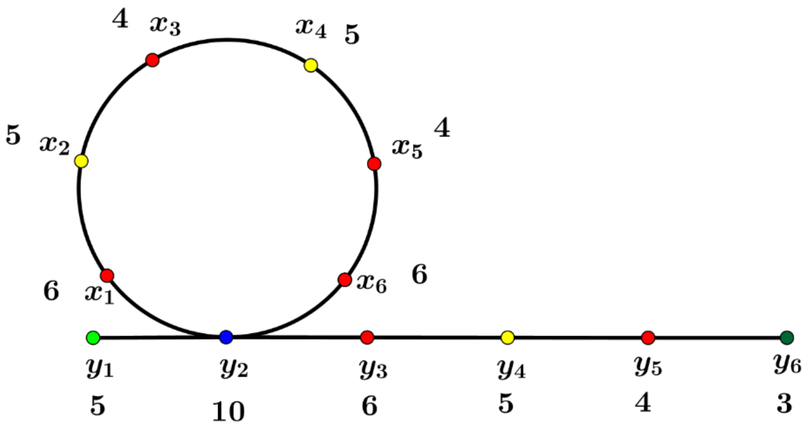
$$l(y_i) = \begin{cases} 1,\ untuk\ i\ gasal \\ 2, untuk\ i\ genap \\ 3, \quad untuk\ i = 2 \end{cases}$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh dari penjumlahan label yang bertetangga dengan label dirinya sendiri adalah sebagai berikut.

$$w^i(x_i) = \begin{cases} 4, & untuk\ i\ genap \\ 5, & untuk\ i\ gasal \\ 6, & untuk\ i = 1\ dan\ i = n \end{cases}$$

$$w^i(y_i) = \begin{cases} 3, & untuk\ i = n \\ 4, & untuk\ i = 1\ dan\ i = genap \\ 5, & untuk\ i = gasal \\ 6, & untuk\ i = 3 \\ 8, & untuk\ i = 2 \end{cases}$$

Berdasarkan perhitungan bobot di atas didapattkan $|w(Cr_{m,n})| = 5$. Berdasarkan batas bawah melalui Proposisi 1 dan batas atas melalui pelabelan di atas didapatkan $5 = \chi^i_{lis} \geq \chi_{lis} = 4$. Sehingga berdasarkan Definisi 1 mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inlusif didapatkan bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *cricket* dengan *m* genap dan $n \geq 4$ adalah 5.



Gambar 1 Graf *Cricket* $(Cr_{6,6})$

Gambar 1 adalah hasil dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *cricket* untuk *m* genap dan $n \geq 4$. Terdapat 4 warna berbeda yang didapatkan melalui pelabelan dan disesuaikan dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif. Pelabelan dilakukan dimulai dengan melabeli titik x_1, x_2 dan seterusnya hingga x_n lalu dilanjutkan dengan pelabelan titik y_1, y_2 dan seterusnya.

Theorem 2. *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf tadpole* $(T_{m,n})$ *dengan* $m \geq 4$ dan $n \geq 3$ adalah

$$\chi_{lis}^{i}(T_{m,n}) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m \text{ genap}, n \geq 3 \\ 5, & \text{untuk } m \text{ gasal}, n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti. Diketahui Graf $(T_{m,n})$ adalah graf *tadpole* yang memiliki himpunan titik $V(G) = \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_m x_1\} \cup \{x_1 y_1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Sehingga kardinalitas titik dan sisi berturut-turut yaitu $|V(G)| = m + n$ dan $|E(G)| = m + n$. Terdapat dua kasus bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *tadpole* $(T_{m,n})$ dengan $m \geq 4$ *dan* $n \geq 3$ sebagai berikut.

Kasus 1. Untuk *m* genap dan $n \geq 3$

Misalkan graf *tadpole* yaitu untuk *m* genap dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan batas atas dan batas bawah melalui pelabelan. Diambil sampel pelabelan untuk titik-titik bertetangga memiliki bobot yang sama apabila dilabeli dengan 1 yaitu $w^i(x_{i+1}) = l(x_i) + l(x_{i+1}) + l(x_{i+2}) = 3$ dan $w^i(x_{i+2}) = l(x_{i+1}) + l(x_{i+2}) + l(x_{i+3}) = 3$. Dua titik tersebut memiliki bobot titik yang sama, sedangkan diketahui bahwa titik x_{i+1} dan x_{i+2} adalah dua titik bertetangga. Kondisi ini bertentangan dengan definisi dimana $w^i(x_{i+1}) \neq w^i(x_{i+2})$ sehingga dalam pembuktian kasus ini $opt(l) \geq 2$. Berdasarkan Lemma 1 dan Proposisi 2 diketahui bahwa batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dari graf *tadpole* adalah $\chi_{lis}^{i} \geq \chi_{lis} = 4$. Batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif didefinisikan dengan $l : V(T_{m,n}) \to \{1, 2\}$. Berikut adalah pelabelan yang dihasilkan pada graf *tadpole* $(T_{m,n})$.

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i\ gasal \\ 2, & untuk\ i\ genap \end{cases}$$

$$l(y_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ i\ gasal \\ 1, & untuk\ i\ genap \end{cases}$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh dari penjumlahan label yang bertetangga dengan label dirinya sendiri adalah sebagai berikut.

$$w^i\left(x_i\right)=\begin{cases}4, untuk\ i\ genap\\5, untuk\ i\ gasal\\7, \quad untuk\ i=1\end{cases}$$

$$w^i\left(y_i\right)\begin{cases}3, \quad untuk\ i=n\\4, untuk\ i\ gasal\\5, untuk\ i\ genap\end{cases}$$

Berdasarkan perhitungan bobot di atas didapatkan $\left|w\left(T_{m,n}\right)\right|=4$. Berdasarkan batas bawah melalui Proposisi 2 dan batas atas melalui pelabelan di atas, diperoleh $4=\chi^i_{lis}\geq\chi_{lis}=4$. Sehingga, berdasarkan Definisi 1 mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif didapatkan bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *tadpole* dengan *m* genap dan $n\geq 3$ adalah 4.

Kasus 2. Untuk *m* gasal dan $n\geq 3$

Misalkan graf *tadpole* yaitu untuk *m* gasal dan $n\geq 3$. Akan dibuktikan batas atas dan batas bawah melalui pelabelan. Diambil sampel pelabelan untuk titik-titik bertetangga memiliki bobot yang sama apabila dilabeli dengan 1 dan 2 yaitu $w^i\left(x_{i+1}\right)=l\left(x_i\right)+l\left(x_{i+1}\right)+l\left(x_{i+2}\right)=3$ dan $w^i\left(x_{i+2}\right)=l\left(x_{i+1}\right)+l\left(x_{i+2}\right)+l\left(x_{i+3}\right)=3$. Dua titik tersebut memiliki bobot titik yang sama, sedangkan diketahui bahwa titik x_{i+1} dan x_{i+2} adalah dua titik bertetangga. Kondisi ini bertentangan dengan Definisi 1 dimana $w^i\left(x_{i+1}\right)\neq w^i\left(x_{i+2}\right)$ sehingga dalam pembuktian kasus ini $opt(l)\geq 2$. Berdasarkan Lemma 1 dan Proposisi 2 diketahui bahwa batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dari graf *tadpole* adalah $\chi^i_{lis}\geq\chi_{lis}=4$. Batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif didefinisikan dengan $l:V\left(T_{m,n}\right)\rightarrow\{1,2,3\}$. Berikut adalah pelabelan yang dihasilkan pada graf *tadpole* $\left(T_{m,n}\right)$

$$l\left(x_i\right)=\begin{cases}1, untuk\ i\ gasal\\2, untuk\ i\ genap\\3, \quad untuk\ i=1\end{cases}$$

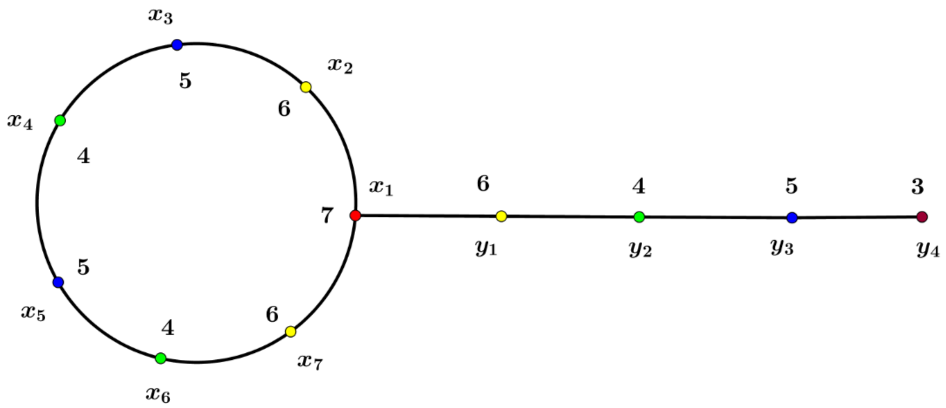
$$l\left(y_i\right)=\begin{cases}1, \quad untuk\ i\ gasal\\2, \quad untuk\ i\ genap\end{cases}$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh dari penjumlahan label yang bertetangga dengan label dirinya sendiri adalah sebagai berikut.

$$w^i\left(x_i\right)=\begin{cases}4, & untuk\ i\ genap\\ 5, & untuk\ i\ gasal\\ 6, & untuk\ i=2\ dan\ i=n\\ 7, & untuk\ i=1\end{cases}$$

$$w^i\left(y_i\right)=\begin{cases}3, & untuk\ i=n\\ 4, & untuk\ i\ genap\\ 5, & untuk\ i\ gasal\\ 6, & untuk\ i=1\end{cases}$$

Berdasarkan perhitungan bobot di atas didapatkan $\left|w\left(T_{m,n}\right)\right|=5$. Berdasarkan batas bawah melalui Proposisi 2 dan batas atas melalui pelabelan di atas didapatkan $5=\chi_{lis}^i\geq\chi_{lis}=4$. Sehingga berdasarkan Definisi 1 mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inlusif didapatkan bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *tadpole* dengan *m* gasal dan $n\geq 3$ adalah 5.



Gambar 2 Graf *Tadpole* $\left(T_{7,4}\right)$

Gambar 2 adalah hasil dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *tadpole* untuk *m* gasal dan $n\geq 3$. Terdapat 4 warna berbeda yang didapatkan melalui pelabelan dan disesuaikan dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif. Pelabelan dilakukan dimulai dengan melabeli titik x_1, x_2 dan seterusnya hingga x_n lalu dilanjutkan dengan pelabelan titik y_1, y_2 dan seterusnya.

Teorema 3. *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf Peach* $\left(C_n^m\right)$ *dengan* $m \geq 4$ *dan* $n \geq 4$ *adalah*

$$\chi_{lis}^{i}\left(C_n^n\right)=\begin{cases}3, & untuk\ m\ genap\\ 4, & untuk\ m\ gasal\end{cases}$$

Bukti. Diketahui Graf C_n^m adalah graf *peach* memiliki himpunan titik $V\left(G\right)=\left\{x_i;1\leq i\leq m\right\}\ \cup\left\{y_{1,j};1\leq j\leq n\right\}$ dan himpunan sisi $E\left(G\right)=\left\{x_i x_{i+1};1\leq i\leq m-1\right\}\cup\left\{x_m x_1\right\}\cup\left\{x_1 y_{1,j};1\leq j\leq n\right\}$. Sehingga kardinalitas titik dan sisi berturut-turut yaitu $\left|V\left(G\right)\right|=m+n$ dan $\left|E\left(G\right)\right|=m+n$. Terdapat dua kasus bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *peach* $\left(C_n^m\right)$ dengan $m\geq 4$ *dan* $n\geq 4$ sebagai berikut.

Kasus 1. Untuk *m* genap

Misalkan graf *peach* yaitu untuk *m* genap. Akan dibuktikan batas atas dan batas bawah melalui pelabelan. Diambil sampel pelabelan untuk titik-titik bertetangga memiliki bobot yang sama apabila dilabeli dengan 1 yaitu $w^i\left(x_{i+1}\right)=l\left(x_i\right)+l\left(x_{i+1}\right)+l\left(x_{i+2}\right)=3$ dan $w^i\left(x_{i+2}\right)=l\left(x_{i+1}\right)+l\left(x_{i+2}\right)+l\left(x_{i+3}\right)=3$. Dua titik tersebut memiliki bobot titik yang sama, sedangkan diketahui bahwa titik x_{i+1} dan x_{i+2} adalah dua titik bertetangga. Kondisi ini bertentangan dengan definisi dimana $w^i\left(x_{i+1}\right)\neq w^i\left(x_{i+2}\right)$ sehingga dalam pembuktian kasus ini $opt(l)\geq 2$. Berdasarkan Lemma 1 dan Observasi 1 diketahui bahwa batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dari graf *peach* adalah $\chi_{lis}^{i}\geq\chi_{lis}=3$. Batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif didefinisikan dengan $l:V\left(C_n^m\right)\rightarrow\left\{1,2\right\}$. Berikut adalah pelabelan yang dihasilkan pada graf *peach* $\left(C_n^m\right)$.

$$l\left(x_i\right)=\begin{cases}2, & untuk\ i\ gasal\\ 1, & untuk\ i\ genap\end{cases}$$

$$l\left(y_i\right)=2\ untuk\ semua\ i$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh dari penjumlahan label yang bertetangga dengan label dirinya sendiri adalah sebagai berikut.

$$w^i(x_i) = \begin{cases} 4, & untuk\ i\ gasal \\ 5, & untuk\ i\ genap \\ 4+n, & untuk\ i=1 \end{cases}$$

$$w^i(y_i) = 4\ untuk\ semua\ i$$

Berdasarkan perhitungan bobot di atas didapatkan $\left|w\left(C_n^m\right)\right| = 4$ dengan $m\ genap$ dan $n \geq 3$ Sedemikian sehingga $3 = \chi_{lis}^i \geq \chi_{lis} = 3$ maka, berdasarkan Definisi 1 mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif didapatkan bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *peach* dengan *m genap* adalah 3

Kasus 2. Untuk *m* gasal

Misalkan graf *peach* yaitu untuk *m* gasal. Akan dibuktikan batas atas dan batas bawah melalui pelabelan.Diambil sampel pelabelan untuk titik-titik bertetangga memiliki bobot yang sama apabila dilabeli dengan 1 dan 2 yaitu $w^i(x_{i+1}) = l(x_i) + l(x_{i+1}) + l(x_{i+2}) = 3$ dan $w^i(x_{i+2}) = l(x_{i+1}) + l(x_{i+2}) + l(x_{i+3}) = 3$. Dua titik tersebut memiliki bobot titik yang sama, sedangkan diketahui bahwa titik x_{i+1} dan x_{i+2} adalah dua titik bertetangga. Kondisi ini bertentangan dengan Definisi 1 dimana $w^i(x_{i+1}) \neq w^i(x_{i+2})$ sehingga dalam pembuktian kasus ini $opt(l) \geq 2$. Berdasarkan Lemma 1 dan Observasi 1 diketahui bahwa batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif dari graf *peach* adalah $\chi_{lis}^i \geq \chi_{lis} = 3$. Batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif didefinisikan dengan $l : V(T_{m,n}) \to \{1,2,3\}$. Berikut adalah pelabelan yang dihasilkan pada graf *peach* $\left(C_n^m\right)$.

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i\ gasal \\ 2, & untuk\ i\ genap \\ 3, & untuk\ i=1 \end{cases}$$

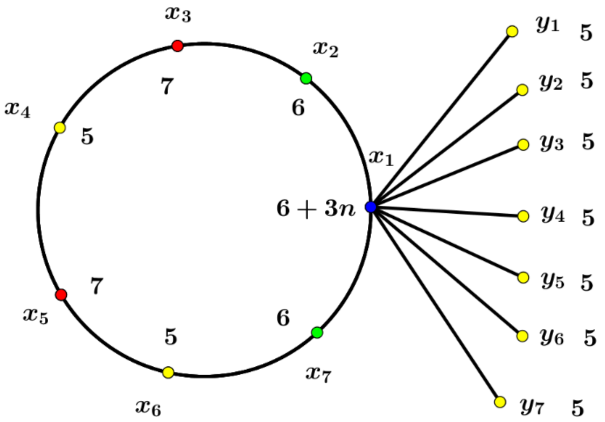
$$l(y_i) = 1\ untuk\ semua\ i$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh dari penjumlahan label yang bertetangga dengan label dirinya sendiri adalah sebagai berikut.

$$w^i(x_i) = \begin{cases} 4, & untuk\ i\ genap \\ 5, & untuk\ i\ ganjil \\ 6, & untuk\ i = 2\ dan\ i = m \\ 6+n & untuk\ i = 1 \end{cases}$$

$$w^i(y_i) = 4\ untuk\ semua\ i$$

Berdasarkan perhitungan bobot di atas didapatkan $\left|w\left(C_n^m\right)\right| = 4$. Berdasarkan batas bawah melalui Observasi 1 dan batas atas melalui pelabelan di atas didapatkan $4 = \chi_{lis}^i \geq \chi_{lis} = 3$ Sehingga berdasarkan Definisi 1 mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal inlusif didapatkan bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *peach* dengan *m* gasal adalah 4.



Gambar 3 Graf *Peach* $\left(C_7^7\right)$

Gambar 3 adalah hasil dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada graf *peach* untuk *m* gasal. Terdapat 4 warna berbeda yang didapatkan melalui pelabelan dan disesuaikan dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif. Pelabelan dilakukan dimulai dengan melabeli titik x_1, x_2 dan seterusnya hingga x_n lalu dilanjutkan dengan pelabelan titik y_1, y_2 dan seterusnya.

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas, didapatkan tiga teorema sebagai berikut telah diperoleh tiga teorema baru mengenai topik pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif pada keluarga graf *unicyclic* yaitu graf *cricket* $\left(Cr_{m,n}\right)$, graf *tadpole* $\left(T_{m,n}\right)$, graf *peach*

$\left(C_n^m\right)$. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif masing-masing graf yang diteliti tersaji dalam tabel dibawah ini.

i. *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf cricket* $\left(Cr_{m,n}\right)$ *adalah*

$$\chi_{lis}^{i}\left(Cr_{m,n}\right)=\begin{cases}4 & m \text{ genap dan } n\geq 3\\ 5 & m \text{ ganjil dan } n\geq 3\end{cases}$$

ii. *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inkludif pada graf tadpole* $\left(T_{m,n}\right)$

$$\chi_{lis}^{i}\left(T_{m,n}\right)=\begin{cases}4, & \text{untuk } m \text{ genap, } n\geq 3\\ 5, & \text{untuk } m \text{ ganjil, } n\geq 3\end{cases}$$

iii. *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada graf peach* $\left(C_n^m\right)$ *adalah*

$$\chi_{lis}^{i}\left(C_n^m\right)=\begin{cases}3, & untuk\ m\ genap\\ 4, & untuk\ m\ gasal\end{cases}$$

5 Ucapan Terimakasih

Kami mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada LP2M dan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember tahun 2022 atas segala ilmu dan dukungan yang diberikan pada kami.

6 Daftar Pustaka

[1] Chartrand, G., and Zhang, P. 2009. Chromatic Graph Theory. USA: CRC Press.

[2] Harary. 1994. WolframMathWorld. http://mathworld.wolfram.com/[Diakses pada 3 September 2021].

[3] Kristiana, A. I., Dafik, Alfarisi, R., Anwar, U. A., & Citra, S. M. 2020. An inclusive local irregularity coloring of graphs. Advances in Mathematics: Scientific Journal, 9(10), 8941–8946. https://doi.org/10.37418/amsj.9.10.116.

[4] Maarif, A., Halim, M. G., Indriani, S., Kristiana, A. I., & Alfarisi, R. 2021. Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Graf Kipas , Graf Petasan (n , 4) dan Graf Matahari. 15(10), 8946.

[5] Munawaroh, K., Kristiana, A. I., & Albirri, E. R. (n.d.). Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal pada Keluarga Graf Unicyclic Pendahuluan Hasil Penelitian. 1–16.

[6] Slamin. 2009. Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf. Jember: Universitas Jember.

[7] U.A. Anwar., Kristiana, A. I., Fatahillah, A., & Alfarisi, R. 2021. Pewarnaan Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Keluarga Graf Pohon Tree Pendahuluan. 2(1), 24–30. https://doi.org/10.25037/cgantjma.v2i1.49.