Contemporary Mathematics and Applications
Vol. 4, No. 1, 2022, pp. 28-41.

Analisis Kestabilan Model Matematika *Predator-Prey* pada Dinamika Sosial

Laurensia Regina Bestari Gepak[1], Miswanto[1,*] & Cicik Alfiniyah[1]

[1]Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Indonesia

[*]Corresponding author: miswanto@fst.unair.ac.id

Abstract. In social life, difference and diversity is something that cannot be denied by anyone. Starting from differences horizontally concerning ethnicity, language, customs to religion and vertically concerning the political, social, cultural to economic fields. The existence of these many differences can certainly bring positive and negative impacts in social life. With diversity, interaction in society is dynamic, but it results in the emergence of negative attitudes such as egoism and competition between groups. From the occurrence of this can trigger the problem of social inequality in the community. Social inequality can occur because of national development efforts that only focus on economic aspects and forget about social aspects. The purpose of this thesis is to discuss the stability analysis of the *predator-prey* mathematical model on social dynamics with the Holling type II functional response. From this model analysis, we obtained four equilibrium points, which are the equilibrium point for the extinction of all population (E_0) which is unstable, then the equilibrium point for the extinction of the non-poor population and the poor (E_1) and the extinction of the non-poor population (E_2) which are stable with certain conditions and coexistence (E_3) which is to be asymptotically stable. Also in the final section, we perform the numerical simulation to supports the analytical result.

Keywords: *predator-prey*, social dynamics, Holling type II functional response, stability.

1 Pendahuluan

Manusia sebagai makhluk sosial tidak dapat hidup sendiri, melainkan selalu membutuhkan manusia lain untuk memenuhi kebutuhannya. Dalam kehidupan bersama, manusia memerlukan pula adanya organisasi yaitu jaringan interaksi sosial. Interaksi sosial itulah yang kemudian melahirkan lingkungan hidup seperti kelompok atau golongan masyarakat. Masyarakat merupakan manusia yang senantiasa berhubungan atau berinteraksi dengan manusia lainnya dalam suatu kelompok [1]. Dalam kehidupan bermasyarakat, perbedaan dan keberagaman menjadi suatu hal yang tidak dapat dipungkiri oleh siapapun. Mulai dari perbedaan secara horizontal yang menyangkut suku bangsa, bahasa, adat istiadat hingga agama dan secara vertikal yang menyangkut bidang politik, sosial, budaya hingga ekonomi. Adanya banyak perbedaan tersebut tentu bisa membawa dampak positif dan dampak negatif dalam kehidupan bermasyarakat. Dengan keberagaman menjadikan interaksi didalam masyarakat berjalan dinamis, namun berakibat munculnya sikap negatif seperti egoisme dan persaingan antar kelompok atau golongan. Dari terjadinya hal tersebut dapat memicu adanya masalah ketimpangan sosial di lingkungan masyarakat.

Ketimpangan sosial di lingkungan masyarakat meliputi berbagai macam bentuk yakni ketimpangan antar golongan sosial ekonomi, budaya, *gender*, informasi digital dan wilayah. Pada tulisan ini hanya akan difokuskan mengenai ketimpangan antar golongan sosial ekonomi. Ketimpangan atau kesenjangan sosial ekonomi adalah suatu ketidakseimbangan sosial yang ada di masyarakat sehingga menjadikan suatu perbedaan yang sangat mencolok, atau dapat juga diartikan sebagai suatu keadaan dimana orang kaya mempunyai kedudukan yang lebih tinggi dan lebih berkuasa dari pada orang miskin [2]. Perbedaannya, penduduk miskin merupakan penduduk yang memiliki rata-rata pengeluaran perkapita per bulan dibawah garis kemiskinan dan penduduk kaya merupakan penduduk yang memiliki rata-rata pengeluaran perkapita per bulan diatas garis kemiskinan. Garis kemiskinan adalah penjumlahan dari Garis Kemiskinan Makanan (GKM) dan Garis Kemiskinan Non Makanan (GKNM) [3].

Bagian paling sederhana dalam bermasyarakat adalah interaksi. Salah satu alasan yang memunculkan adanya interaksi antar individu adalah untuk memenuhi kebutuhan. Kebutuhan dapat terpenuhi dengan cara memengaruhi individu lainnya saat berada dalam keseluruhan masyarakat. Hal ini dapat menimbulkan pola perilaku persaingan antara individu yang satu dengan yang lainnya. Adapun salah satu model yang dapat menggambarkan perilaku tersebut adalah model *predator-prey*. Model *predator-prey* pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini juga disebut model Lotka Volterra [4]. Interaksi *predator-prey* adalah suatu interaksi antar individu yang sangat menarik untuk dikaji secara matematika. Model matematika tentang *predator-prey* menggambarkan perilaku dinamis antara *predator* dan *prey*.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji ulang model matematika *predator-prey* pada dinamika sosial dengan menambahkan fungsi respon Holling Tipe II disetiap interaksi antara populasi total masyarakat dengan populasi masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin karena adanya keterbatasan waktu bagi populasi total masyarakat saat memengaruhi populasi lainnya. Kemudian, untuk pertumbuhan populasi masyarakat mengikuti model logistik karena suatu populasi yang tidak mungkin bertambah terus menerus menuju tak hingga, sehingga terdapat batasan jumlah maksimum populasi untuk bertumbuh. Setelah itu, juga akan dilakukan analisa keadaan setimbang dan kestabilan dari titik setimbang yang berlaku pada model tiga persamaan *predator-prey*. Kemudian dari hasil analitik, akan dilakukan simulasi numerik serta menginterpretasikan model untuk menunjang kajian analitik. Dengan demikian, diharapkan dapat memperoleh beberapa kesimpulan dari masing-masing kondisi yang ada berdasarkan hasil analitik tersebut.

2 Formulasi Model

Pada bagian ini akan diformulasikan model matematika *predator-prey* pada dinamika sosial dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Model dasar yang dikaji pada tulisan ini merujuk pada jurnal yang ditulis oleh [5]. Model matematika *predator-prey* pada dinamika sosial dibagi menjadi 3 kompartemen, yakni $S(t)$ yang melambangkan jumlah populasi total masyarakat, $C_1(t)$ yang melambangkan jumlah populasi masyarakat non-miskin dan $C_2(t)$ yang melambangkan jumlah populasi masyarakat miskin.

Adapun asumsi yang digunakan dalam pembentukan model matematika *predator-prey* pada dinamika sosial adalah sebagai berikut:

1. Populasi total masyarakat dianggap sebagai populasi *prey*, sedangkan populasi masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin dianggap sebagai populasi *predator*.
2. Laju pertumbuhan populasi total masyarakat mengikuti model logistik.
3. Adanya persaingan antara populasi masyarakat non-miskin dengan populasi masyarakat miskin saat berada dalam populasi total masyarakat.
4. Waktu untuk memengaruhi golongan sosial lainnya dalam populasi total masyarakat terbatas.

Adapun definisi parameter yang digunakan pada model matematika *predator-prey* pada dinamika sosial disajikan pada tabel berikut ini:

Tabel 1 Pendefinisian Parameter Model

Parameter	Keterangan
r	Laju pertumbuhan intrinsik
K	Kapasitas tampung
a_1	Laju golongan sosial non-miskin yang bergerak dalam menuntaskan kesenjangan sosial
a_2	Laju golongan sosial miskin yang bergerak dalam menuntaskan kesenjangan sosial
a	Waktu untuk memengaruhi golongan sosial lainnya dalam populasi total masyarakat
β_1	Laju *feedback* masyarakat non miskin
β_2	Laju *feedback* masyarakat miskin
β_3	Laju pemberian bantuan dari masyarakat non-miskin untuk masyarakat miskin
μ	Laju kematian alami

Oleh karena kelajuan merupakan besaran skalar yang nilainya selalu positif, maka parameter-parameter yang digunakan diasumsikan:

$r, K, a_1, a_2, a, \beta_{1,}\beta_2, \beta_3, \mu > 0$

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut diatas dapat dibentuk sistem persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = rS\left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{a_1SC_1}{1+aS} - \frac{a_2SC_2}{1+aS} \qquad (1)$$

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{a_1SC_1}{1+aS} - (\beta_1 + \beta_3 + \mu)C_1 \qquad (2)$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{a_2SC_2}{1+aS} + \beta_3C_1 - (\beta_2 + \mu)C_2 \qquad (3)$$

Pada persamaan (1) mempresentasikan laju perubahan populasi total masyarakat per satuan waktu. Populasi total masyarakat akan meningkat karena adanya laju pertumbuhan intrinsik total masyarakat yang berupa model logistik. Lalu, akan berkurang karena adanya kompetisi antara keseluruhan masyarakat dengan masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin.

Pada persamaan (2) mempresentasikan laju perubahan populasi masyarakat non-miskin per satuan waktu. Populasi masyarakat non-miskin meningkat karena adanya kompetisi antara keseluruhan masyarakat dengan masyarakat non-miskin. Lalu, berkurang karena adanya laju *feedback* masyarakat non-miskin, laju pemberian bantuan untuk masyarakat miskin dan laju kematian alami.

Pada persamaan (3) mempresentasikan laju perubahan populasi masyarakat miskin per satuan waktu. Populasi masyarakat miskin meningkat karena adanya kompetisi antara keseluruhan masyarakat dengan masyarakat miskin dan penerimaan bantuan dari masyarakat non-miskin. Lalu, populasi masyarakat miskin berkurang karena adanya laju *feedback* masyarakat miskin dan laju kematian alami.

3 Analisis Kestabilan Titik Setimbang

Sebelum dilakukan uji kestabilan titik setimbang, akan ditentukan dahulu titik setimbangnya. Berdasarkan persamaan (1) – (3) diperoleh 4 titik setimbang yakni titik setimbang kepunahan ketiga populasi, titik setimbang kepunahan populasi masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin, titik setimbang kepunahan populasi masyarakat non-miskin dan titik setimbang koeksistensi.

Titik setimbang kepunahan ketiga populasi adalah kondisi ketika populasi total masyarakat, populasi masyarakat non-miskin dan populasi masyarakat non-miskin mengalami kepunahan. Kondisi ini terjadi pada saat $S = 0, C_1 = 0$ dan $C_2 = 0$. Misalkan titik setimbang kepunahan ketiga populasi dinyatakan sebagai $E_0 = (S, C_1, C_2)$ maka dengan mensubstitusikan nilai $S = 0, C_1 = 0$ dan $C_2 = 0$ ke dalam persamaan (1) – (3) diperoleh titik setimbang kepunahan ketiga populasi berikut $E_0 = (S, C_1, C_2) = (0,0,0)$.

Titik setimbang kepunahan populasi masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin adalah kondisi ketika populasi masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin mengalami kepunahan. Kondisi ini terjadi pada saat $S \neq 0, C_1 = 0$ dan $C_2 = 0$. Misalkan titik setimbang kepunahan ketiga populasi dinyatakan sebagai $E_1 = (S, C_1, C_2)$ maka dengan mensubstitusikan nilai $S \neq 0, C_1 = 0$ dan $C_2 = 0$ ke dalam persamaan (1) – (3) diperoleh titik setimbang kepunahan ketiga populasi berikut $E_1 = (S, C_1, C_2) = (K, 0,0)$.

Titik setimbang kepunahan populasi masyarakat non-miskin adalah kondisi ketika populasi masyarakat non-miskin mengalami kepunahan. Kondisi ini terjadi pada saat $S \neq 0, C_1 = 0$ dan $C_2 \neq 0$. Misalkan titik setimbang kepunahan ketiga populasi dinyatakan sebagai $E_2 = (S, C_1, C_2)$ maka dengan mensubstitusikan nilai $S \neq 0, C_1 = 0$ dan $C_2 \neq 0$ ke dalam persamaan (1) – (3) diperoleh titik setimbang kepunahan ketiga populasi berikut $E_2 = (S, C_1, C_2) = \left(\frac{\beta_2+\mu}{a_2-a(\beta_2+\mu)}, 0, \frac{rK(a_2-\beta_2 a-\mu a)-\beta_2 r-\mu r}{(a_2-\beta_2 a- \mu a)^2 K}\right)$.

Titik setimbang koeksistensi adalah kondisi ketika populasi total masyarakat, populasi masyarakat non-miskin dan populasi masyarakat miskin tidak mengalami kepunahan. Kondisi ini terjadi pada saat $S \neq 0, C_1 \neq 0$ dan $C_2 \neq 0$. Titik setimbang koeksistensi tidak dapat diperoleh dengan perhitungan analitik, sehingga akan dianalisis secara numerik dengan menggunakan bidang fase.

Setelah diperoleh titik setimbang, akan dilakukan analisis kestabilan terhadap titik setimbang. Model matematika *predator-prey* pada dinamika sosial merupakan model non-linear, maka akan dilakukan linearisasi model dengan menggunakan matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari model matematika *predator-prey* pada dinamika sosial adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial C_1} & \frac{\partial f_1}{\partial C_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial C_1} & \frac{\partial f_2}{\partial C_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial C_1} & \frac{\partial f_3}{\partial C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & 0 \\ p_6 & p_7 & p_8 \end{bmatrix} \tag{4}$$

dengan

$$p_1 = r\left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{rS}{K} - \frac{a_1 C_1}{1+aS} + \frac{a_1 S C_1 a}{(1+aS)^2} - \frac{a_2 C_2}{1+aS} + \frac{a_2 S C_2 a}{(1+aS)^2}$$

$$p_2 = -\frac{a_1 S}{1+aS}$$

$$p_3 = -\frac{a_2 S}{1+aS}$$

$$p_4 = \frac{a_1 C_1}{1+aS} - \frac{a_1 S C_1 a}{(1+aS)^2}$$

$$p_5 = \frac{a_1 S}{1+aS} - \beta_1 - \beta_3 - \mu$$

$$p_6 = \frac{a_2 C_2}{1+aS} - \frac{a_2 S C_2 a}{(1+aS)^2}$$

$$p_7 = \beta_3$$

$p_8 = \frac{a_2 S}{1+aS} - \beta_2 - \mu$

Selanjutnya akan dilakukan analisis kestabilan dari titik setimbang yang telah diperoleh menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobian (J) pada persamaan (4).

Kestabilan titik setimbang kepunahan ketiga populasi dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai titik setimbang kepunahan ketiga populasi yakni E_0 ke hasil linearisasi dengan matriks Jacobian (J) pada persamaan (4), sehingga dapat diperoleh:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 - \beta_3 - \mu & 0 \\ 0 & \beta_3 & -\beta_2 - \mu \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Jacobian J_{E_0} dapat dibentuk persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - J_{E_0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + \beta_1 + \beta_3 + \mu & 0 \\ 0 & -\beta_3 & \lambda + \beta_2 + \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - r)(\lambda + \beta_1 + \beta_3 + \mu)(\lambda + \beta_2 + \mu) = 0 \qquad (5)$$

Dari persamaan karakteristik (5) diperoleh nilai eigen untuk J_{E_0} adalah

$\lambda_1 = r, \lambda_2 = -\beta_1 - \beta_3 - \mu$ dan $\lambda_3 = -\beta_2 - \mu$

Syarat agar titik setimbang stabil asimtotis adalah semua nilai eigen harus bernilai negatif. Karena semua nilai parameter diasumsikan bernilai positif, maka jelas bahwa titik setimbang kepunahan ketiga populasi $E_0 = (0,0,0)$ akan stabil asimtotis jika $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$. Sedangkan nilai eigen yang diperoleh yakni $\lambda_1 = r > 0$, sehingga titik setimbang $E_0 = (0,0,0)$ tidak stabil. Dengan demikian kondisi saat populasi total masyarakat, populasi masyarakat non-miskin dan populasi masyarakat miskin mengalami kepunahan tidak dapat terjadi.

Kestabilan pada titik setimbang kepunahan populasi masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai titik setimbang kepunahan populasi C_1 dan C_2 yakni E_1 ke hasil linearisasi dengan matriks Jacobian (J) pada persamaan (4), sehingga dapat diperoleh:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -r & -\frac{a_1 K}{1+aK} & -\frac{a_2 K}{1+aK} \\ 0 & \frac{a_1 K}{1+aK} - \beta_1 - \beta_3 - \mu & 0 \\ 0 & \beta_3 & \frac{a_2 K}{1+aK} - \beta_2 - \mu \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Jacobian J_{E_1} dapat dibentuk persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - J_{E_1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + r & \dfrac{a_1K}{1+aK} & \dfrac{a_2K}{1+aK} \\ 0 & \lambda - \dfrac{a_1K}{1+aK} + \beta_1 + \beta_3 + \mu & 0 \\ 0 & -\beta_3 & \lambda - \dfrac{a_2K}{1+aK} + \beta_2 + \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + r)\left(\lambda - \frac{a_1K}{1+aK} + \beta_1 + \beta_3 + \mu\right)\left(\lambda - \frac{a_2K}{1+aK} + \beta_2 + \mu\right) = 0 \qquad (6)$$

Dari persamaan karakteristik (6) diperoleh nilai eigen untuk J_{E_1} adalah

$\lambda_1 = -r, \lambda_2 = \frac{a_1K}{1+aK} - \beta_1 - \beta_3 - \mu$ dan $\lambda_3 = \frac{a_2K}{1+aK} - \beta_2 - \mu$

Syarat agar titik setimbang stabil asimtotis adalah semua nilai eigen harus bernilai negatif. Karena semua nilai parameter diasumsikan bernilai positif, maka jelas bahwa titik setimbang kepunahan populasi C_1 dan C_2 yakni $E_1 = (K, 0,0)$ akan stabil asimtotis jika $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$. Jelas bahwa untuk nilai eigen $\lambda_1 = -r < 0$, sedangkan untuk nilai eigen $\lambda_2 = \frac{a_1K}{1+aK} - \beta_1 - \beta_3 - \mu < 0 \Leftrightarrow a_1K < (\beta_1 + \beta_3 + \mu)(1 + aK)$ dan $\lambda_3 = \frac{a_2K}{1+aK} - \beta_2 - \mu < 0 \Leftrightarrow a_2K < (\beta_2 + \mu)(1 + aK)$.

Dengan demikian, titik setimbang kepunahan populasi masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin stabil asimtotis apabila memenuhi:

1. $a_1K < (\beta_1 + \beta_3 + \mu)(1 + aK)$
2. $a_2K < (\beta_2 + \mu)(1 + aK)$

Kestabilan pada titik setimbang kepunahan populasi masyarakat non-miskin dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai titik setimbang kepunahan populasi C_1 yakni E_2 ke hasil linearisasi dengan matriks Jacobian (J) pada persamaan (4), sehingga dapat diperoleh:

$$J_{E_2} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ 0 & q_4 & 0 \\ q_5 & q_6 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan

$q_1 = \frac{r(\beta_2+\mu)(a^2\mu K + a^2\beta_2 K - aa_2K + a\mu + a\beta_2 + a_2)}{a_2K(a\mu + a\beta_2 - a_2)}$

$q_2 = -\frac{a_1(\beta_2+\mu)}{a_2}$

$q_3 = -(\beta_2 + \mu)$

$q_4 = \frac{a_1(\beta_2+\mu) - a_2(\beta_1+\beta_3+\mu)}{a_2}$

$q_5 = -\frac{r(a\mu K + a\beta_2 K - a_2K + \mu + \beta_2)}{a_2K}$

$q_6 = \beta_3$

Berdasarkan matriks Jacobian J_{E_2} dapat dibentuk persamaan karakteristik sebagai berikut:

$\det(\lambda I - J_{E_2}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - q_1 & -q_2 & -q_3 \\ 0 & \lambda - q_4 & 0 \\ -q_5 & -q_6 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dari sini diperoleh persamaan karakteristiknya sebagai berikut:

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

dengan

$$b_1 = -q_1 - q_4$$
$$b_2 = q_1q_4 + q_3q_5$$
$$b_3 = -q_3q_4q_5$$

Syarat agar titik setimbang stabil asimtotis adalah semua nilai eigen harus bernilai negatif. Serta nilai dari akar-akar persamaan karakteristik akan bernilai negatif jika $b_1, b_2, b_3 > 0$ dan $b_1b_2 - b_3 > 0$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik setimbang kepunahan populasi masyarakat non-miskin stabil asimtotis jika $b_1, b_2, b_3 > 0$ dan $b_1b_2 - b_3 > 0$. Berdasarkan uraian titik setimbang yang telah diperoleh, untuk mengetahui kestabilan titik setimbang koeksistensi tidak dapat diperoleh secara analitik. Dengan demikian akan dilakukan analisis kestabilan titik setimbang koeksistensi secara numerik dengan menggunakan *software* Matlab. Simulasi ini dilakukan dengan memberikan nilai parameter dan tiga nilai awal yang berbeda untuk S, C_1 dan C_2. Berikut disajikan tabel nilai awal dan nilai paremeter yang digunakan.

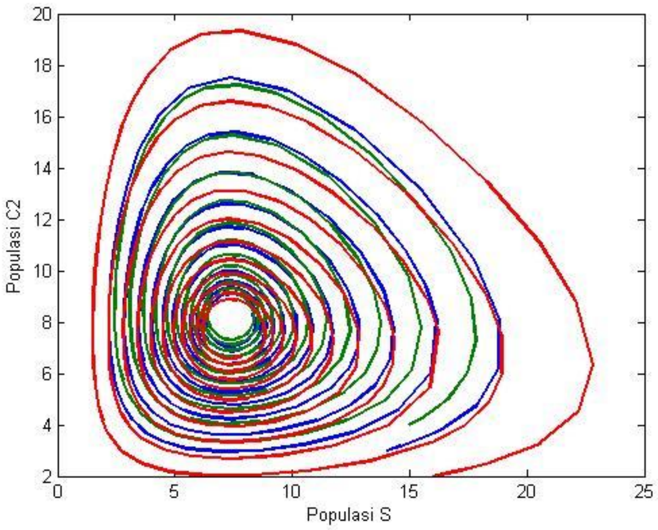
Tabel 2 Nilai Awal Bidang Fase Titik Setimbang Koeksistensi

Notasi	S	C_1	C_2	Warna
Nilai Awal 1	14	3.10	3	Biru
Nilai Awal 2	15	3.08	4	Hijau
Nilai Awal 3	16	3.20	2	Merah

Tabel 3 Nilai Parameter Titik Setimbang Koeksistensi

Parameter	**Nilai**	**Sumber**
r	1	Asumsi
K	100	Asumsi
a_1	0.048	Asumsi
a_2	0.091	Asumsi
a	0.005	Asumsi
β_1	0.32	Isea dan Lonngren (2020)
β_2	0.64	Isea dan Lonngren (2020)
β_3	0.009	Isea dan Lonngren (2020)
μ	0.013	Isea dan Lonngren (2020)

Hasil simulasi bidang fase pada titik setimbang koeksistensi ditunjukkan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1 Bidang Fase Titik Setimbang Koeksistensi

Gambar 1 menunjukkan simulasi bidang fase untuk populasi total masyarakat, masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin pada model matematika *predator-prey* pada dinamika sosial. Berdasarkan tiga nilai awal berbeda yang telah diberikan, terlihat bahwa ketiga garis akan menuju pada satu titik. Oleh karena itu, secara numerik dapat dikatakan bahwa titik setimbang koeksistensi bersifat cenderung asimtotis. Dari hasil bidang fase tersebut diperoleh titik setimbang $E_3 = (7.8235; 5.1475; 6.634)$.

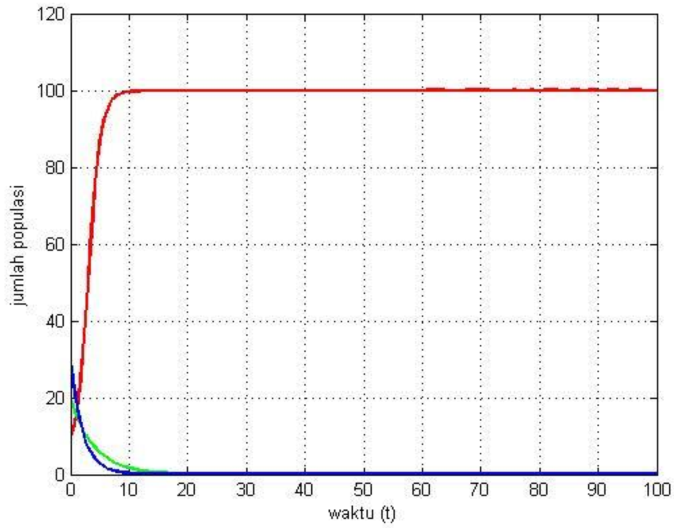
4 Simulasi Numerik

Simulasi numerik ini dilakukan bertujuan untuk mengetahui dinamika populasi total masyarakat, masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin pada selang waktu tertentu. Simulasi numerik model matematika *predator-prey* saat kondisi kepunahan populasi masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin yang memenuhi kondisi kestabilan titik setimbang kepunahan populasi masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin. Pada simulasi digunakan nilai awal $S(0) = 10, C_1(0) = 20, C_2(0) = 30$ dan waktu $t = 0$ hingga $t = 100$. Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi disajikan pada tabel berikut.

Tabel 4 Nilai Parameter Simulasi Numerik saat Kondisi Kepunahan Populasi Masyarakat Non-Miskin dan Masyarakat Miskin

Parameter	Nilai	Sumber
r	1	Asumsi
K	100	Asumsi
a_1	0.048	Asumsi
a_2	0.091	Asumsi
a	0.5	Asumsi
β_1	0.32	Isea dan Lonngren (2020)
β_2	0.64	Isea dan Lonngren (2020)
β_3	0.009	Isea dan Lonngren (2020)
μ	0.013	Isea dan Lonngren (2020)

Berdasarkan nilai awal dan nilai parameter yang disajikan diatas, maka hasil simulasinya adalah sebagai berikut.



Gambar 2 Grafik Populasi Total Masyarakat, Masyarakat Non-Miskin dan Masyarakat Miskin pada Saat Kondisi Kepunahan Populasi Masyarakat Non-Miskin dan Masyarakat Miskin

Gambar 2 memperlihatkan dinamika populasi total masyarakat, masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin terhadap waktu. Populasi total masyarakat mengalami kenaikan hingga $t = 15$ dan stabil hingga $t = 100$. Kenaikan populasi total masyarakat disebabkan oleh laju pertumbuhan intrinsik. Populasi masyarakat non-miskin mengalami penurunan hingga $t = 24$ dan pada akhirnya mengalami kepunahan. Penurunan populasi masyarakat non-miskin terjadi karena adanya *feedback* dari masyarakat non-miskin, pemberian bantuan bagi masyarakat miskin dan adanya kematian alami sehingga menyebabkan kepunahan. Populasi masyarakat miskin mengalami penurunan hingga $t =$

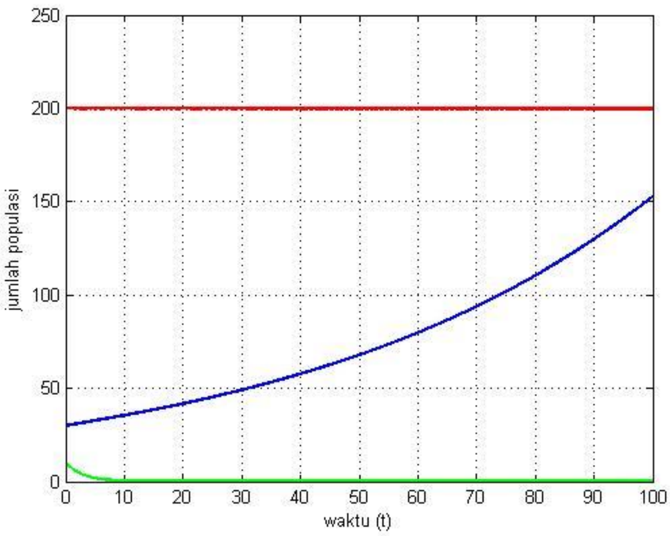
17 dan pada akhirnya mengalami kepunahan. Penurunan populasi masyarakat miskin terjadi karena adanya *feedback* dari masyarakat miskin dan adanya kematian alami sehingga menyebabkan kepunahan.

Simulasi numerik model matematika *predator-prey* saat kondisi kepunahan populasi masyarakat non-miskin yang memenuhi kondisi kestabilan titik setimbang kepunahan populasi masyarakat non-miskin. Pada simulasi digunakan nilai awal $S(0) = 15, C_1(0) = 10, C_2(0) = 30$ dan waktu $t = 0$ hingga $t = 100$. Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi disajikan pada tabel berikut.

Tabel 5 Nilai Parameter Simulasi Numerik saat Kondisi Kepunahan Populasi Masyarakat Non-Miskin

Parameter	Nilai	Sumber
r	100	Asumsi
K	200	Asumsi
a_1	0.048	Asumsi
a_2	0.091	Asumsi
a	0.5	Asumsi
β_1	0.32	Isea dan Lonngren (2020)
β_2	0.064	Asumsi
β_3	0.009	Isea dan Lonngren (2020)
μ	0.013	Asumsi

Berdasarkan nilai awal dan nilai parameter yang disajikan diatas, maka hasil simulasinya adalah sebagai berikut.



Gambar 3 Grafik Populasi Total Masyarakat, Masyarakat Non-Miskin dan Masyarakat Miskin pada Saat Kondisi Kepunahan Populasi Masyarakat Non-Miskin

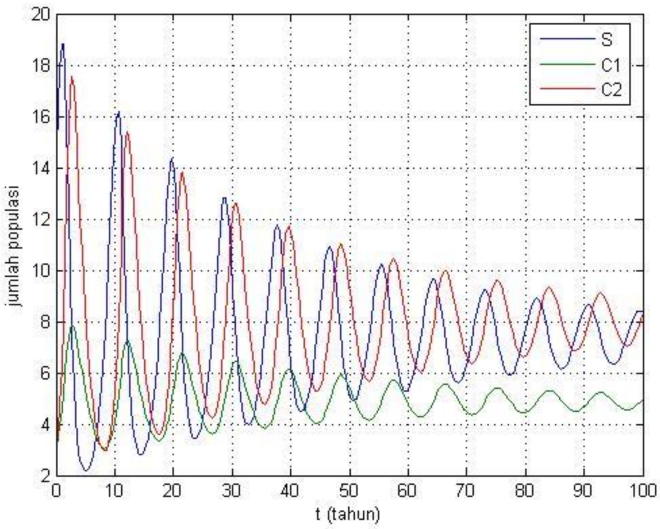
Gambar 3 memperlihatkan dinamika populasi total masyarakat, masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin terhadap waktu. Populasi total masyarakat berjumlah 15 pada saat $t = 0$ lalu mencapai 200 dan stabil hingga $t = 100$. Kenaikan populasi total masyarakat disebabkan oleh laju pertumbuhan intrinsik. Populasi masyarakat non-miskin mengalami penurunan hingga $t = 16$ dan pada akhirnya mengalami kepunahan. Penurunan populasi masyarakat non-miskin terjadi karena adanya *feedback* dari masyarakat non-miskin, pemberian bantuan bagi masyarakat miskin dan adanya kematian alami sehingga menyebabkan kepunahan. Populasi masyarakat miskin mengalami kenaikan hingga $t = 150$. Kenaikan populasi masyarakat miskin terjadi karena adanya interaksi dengan populasi total masyarakat dan penerimaan bantuan yang diberikan oleh masyarakat non-miskin.

Simulasi numerik model matematika *predator-prey* saat kondisi koeksistensi yang memenuhi kondisi kestabilan titik setimbang koeksistensi. Pada simulasi digunakan nilai awal $S(0) = 14, C_1(0) = 3.10, C_2(0) = 3$ dan waktu $t = 0$ hingga $t = 100$. Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi disajikan pada tabel berikut.

Tabel 6 Nilai Parameter Simulasi Numerik saat Kondisi Koeksistensi

Parameter	Nilai	Sumber
r	1	Asumsi
K	100	Asumsi
a_1	0.048	Asumsi
a_2	0.091	Asumsi
a	0.005	Asumsi
β_1	0.32	Isea dan Lonngren (2020)
β_2	0.64	Isea dan Lonngren (2020)
β_3	0.009	Isea dan Lonngren (2020)
μ	0.013	Isea dan Lonngren (2020)

Berdasarkan nilai awal dan nilai parameter yang disajikan diatas, maka hasil simulasinya adalah sebagai berikut.



Gambar 4 Grafik Populasi Total Masyarakat, Masyarakat Non-Miskin dan Masyarakat Miskin pada Saat Kondisi Koeksistensi

Gambar 4 memperlihatkan dinamika populasi total masyarakat, masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin terhadap waktu. Populasi total masyarakat berjumlah 14 pada saat $t = 0$ lalu mencapai 19 pada saat $t = 2$ dan menurun hingga saat $t = 5$ dengan berjumlah 2. Populasi total masyarakat mengalami kenaikan karena disebabkan oleh laju pertumbuhan intrinsik dan mengalami penurunan karena disebabkan oleh adanya kompetisi antara keseluruhan masyarakat dengan masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin. Populasi total masyarakat mengalami kenaikan dan penurunan secara berulang hingga saat $t = 100$. Populasi masyarakat non-miskin berjumlah 3 pada saat $t = 0$ lalu mencapai 8 pada saat $t = 3$ dan menurun hingga saat $t = 8$ dengan berjumlah 3. Populasi masyarakat non-miskin mengalami kenaikan karena disebabkan oleh adanya kompetisi antara keseluruhan masyarakat dengan masyarakat non-miskin dan mengalami penurunan karena disebabkan oleh laju *feedback* masyarakat non-miskin, laju pemberian bantuan untuk masyarakat miskin dan laju kematian alami. Populasi masyarakat non-miskin mengalami kenaikan dan penurunan secara berulang hingga pada saat $t = 100$. Populasi masyarakat miskin berjumlah 3 pada saat $t = 0$ lalu mencapai 18 pada saat $t = 3$ dan menurun hingga saat $t = 8$ dengan berjumlah 3. Populasi masyarakat miskin mengalami kenaikan karena disebabkan oleh adanya kompetisi antara keseluruhan masyarakat dengan masyarakat miskin dan penerimaan bantuan dari masyarakat non-miskin dan mengalami penurunan karena disebabkan oleh laju *feedback* masyarakat miskin dan laju kematian alami. Populasi masyarakat miskin mengalami kenaikan dan penurunan secara berulang hingga pada saat $t = 100$.

5 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpualan sebagai berikut:

1. Dari model matematika *predator-prey* pada dinamika sosial diperoleh empat titik setimbang, yakni titik setimbang kepunahan ketiga populasi (E_0) yang bersifat tidak stabil, kemudian titik setimbang kepunahan populasi masyarakat non-miskin dan masyarakat miskin (E_1) serta kepunahan populasi masyarakat non-miskin (E_2) yang bersifat stabil asimtotis bersyarat dan koeksistensi (E_3) yang bersifat cenderung stabil asimtotis.
2. Hasil simulasi numerik model matematika *predator-prey* pada dinamika sosial menunjukkan bahwa kenaikan dan penurunan jumlah populasi terjadi berdasarkan tingkat pertumbuhan, kematian alami dari populasi, serta adanya interaksi berupa pengaruh dan *feedback* yang diberikan individu dari suatu populasi ke populasi lainnya.

6 Daftar Pustaka

[1] Setiadi, Elly M., & Usman K., 2013, *Pengantar Sosiologi Pemahaman Fakta dan Gejala Permasalahan Sosial: Teori, Aplikasi dan Pemecahannya*, Kencana Prenada Media Group, 5.

[2] Badruzaman, Abad, 2009, *Dari Teologi Menuju Aksi: Membela yang Lemah, Menggempur Kesenjangan*, Pustaka Belajar, 284.

[3] Badan Pusat Statistika, Kemiskinan dan Ketimpangan, https://www.bps.go.id/subject/23/kemiskinan-dan-ketimpangan.Html#subjekViewTab1, diakses pada tanggal 5 Februari 2021.

[4] Boyce, W. E. & Diprima, R. C., 2009, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley and Son: New York.

[5] Isea, R. & Lonngren, K., 2020, *A mathematical model that could explain the social dynamics in a country*, Research Gate, 6:2610-8216.