Contemporary Mathematics and Applications
Vol. 5, No. 1, 2023, pp. 1-5.

Tentang Rumus Induksi Matematika

M. Yusuf Syaifuddin[1,*], S. Zahidah[2] & Eridani[3]

[1,2,3]Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Indonesia

*Corresponding author : muchammad-y-s@fst.unair.ac.id

Abstract. This paper presents various forms of induction formulas. There are three forms of induction formulas in this paper and these formulas are equivalent each other. This paper also provides information related to evidence equivalence of these formulas by proving that all of these formulas are equivalent to the Well-Ordering Principle which applies to natural number set.

Keywords: *mathematical induction, well-ordering principle.*

1 Pendahuluan

Dalam sebuah penelitian, dibutuhkan analisa dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Pada dasarnya pengembangan pola berpikir manusia dalam menganalisa suatu permasalahan terdapat dua bentuk, yaitu logika berpikir deduktif dan logika berpikir induktif. Logika berpikir deduktif biasanya didasarkan pada aturan logika yang ketat dan sebagian besar tidak dapat disangkal. Sedangkan logika berpikir induktif adalah tindakan menebak pola atau aturan atau memprediksi perilaku masa depan berdasarkan pengalaman masa lalu. Seperti halnya ketika kita mengalami matahari terbit di setiap pagi, maka tanpa banyak berpikir, kita akan menyimpulkan dengan tanpa keraguan matahari akan terbit esok pagi.

Salah satu bentuk logika berpikir induktif adalah Induksi Matematika. Induksi Matematika adalah bentuk logika berpikir untuk membuktikan beberapa aturan atau pola tertentu yang biasanya tak terbatas yang bahkan keberadaannya tidak diketahui, seperti halnya yang dikatakan Herbert S. Wilf "Induksi membuat anda merasa bersalah karena mendapatkan sesuatu dari ketiadaan, dan itu artifisial, namun hal itu merupakan salah satu gagasan besar dari sebuah peradaban" [1].

Terdapat banyak sekali pernyataan matematika yang menyatakan bahwa suatu sifat benar untuk semua bilangan bulat positif. Sedangkan kita tahu bahwa bilangan bulat positif itu menuju ke tak hingga, dengan kata lain akan sangat sulit untuk dibuktikan secara langsung. Sebagai contoh, pernyataan berikut ini berlaku untuk semua n bilangan bulat positif, $n! \leq n^n$, $n^3 - n$ habis dibagi 3, himpunan dengan n anggota mempunyai tepat

2^n himpunan bagian, jumlahan dari n bilangan bulat positif pertama adalah $\frac{n(n+1)}{2}$, dan lain sebagainya. Oleh karena itu, Induksi Matematika dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan matematika tersebut. Induksi Matematika mempunyai dua bagian, yang pertama, membuktikan bahwa pernyataan benar untuk nilai-nilai awal bilangan bulat positif secara langsung. Sedangkan bagian kedua, dengan mengasumsikan bahwa pernyataan benar untuk suatu bilangan bulat positif, maka tunjukkan pernyataan tersebut benar untuk bilangan bulat positif yang lebih besar berikutnya [2].

Terdapat beberapa rumus induksi matematika. Dalam naskah ini akan diperkenalkan beberapa rumus induksi matematika dan akan dibahas ekivalesi dari beberapa rumus induksi matematika tersebut.

2 Induksi Matematika

Di sini kita meninjau himpunan bilangan alam $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ sebagai semesta pembicaraan dalam subbab ini.

Definisi 1.1 Misalkan $A \subseteq \mathbb{N}$ dan $A \neq \emptyset$. Unsur $e \in A$ disebut unsur terkecil A, jika $x \leq y$, untuk setiap $y \in A$.

Salah satu sifat penting dari $\mathbb{N}$ adalah sebagai berikut. Periksa [3] untuk pernyataan detilnya.

Postulat 1.2 (Sifat Terurut Rapi). Sebarang subhimpunan takkosong $\mathbb{N}$ selalu mempunyai unsur terkecil.

Kita lihat bahwa $1 \leq p$, untuk setiap $p \in \mathbb{N}$, dan ini berarti 1 adalah unsur terkecil $\mathbb{N}$. Misalkan $\mathbb{E}$ menyatakan himpunan bilangan genap positif, maka $2 \leq x$, untuk setiap $x \in \mathbb{E}$. Dengan demikian 2 adalah unsur terkecil $\mathbb{E}$.

Sifat Terurut Rapi $\mathbb{N}$ akan kita gunakan untuk membuktikan teorema berikut.

Teorema 1.3 (Induksi 1). Misalkan $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$,$ dengan $1 \in S$. Jika $x \in S$, mengakibatkan $x + 1 \in S$, maka $S = \mathbb{N}$.

Bukti. Andaikan $S \neq \mathbb{N}$, maka $S^c \neq \emptyset$.$ Karena $S^c \subseteq \mathbb{N}$, maka dapat dipilih $y_0 \in S^c$ yang memenuhi $y_0 \leq t$, untuk setiap $t \in S^c$. Tentu ini berarti $y_0 \in S^c, y_0 > 1$, bertindak sebagai unsur terkecil S^c. Karena $y_0 - 1 < y_0$, maka $y_0 - 1 \notin S^c$, atau $y_0 - 1 \in S$. Dari sifat S, kita tahu bahwa $y_0 = (y_0 - 1) + 1 \in S$, yang merupakan suatu kontradiksi. Terbukti bahwa $S = \mathbb{N}$. ■

Teorema di atas merupakan bentuk teoritis dari suatu konsep matematika yang biasa disebut *Induksi Matematika.*

3 Ekivalensi Rumus Induksi

Sekarang kita sampai kepada penjelasan utama mengenai hubungan antara Prinsip Terurut Rapi $\mathbb{N}$ dan rumus Induksi 1.

Telah diketahui bahwa rumus Induksi 1 berhasil diperoleh dari Prinsip Terurut Rapi $\mathbb{N}$. Sekarang dengan diketahuinya rumus Induksi 1, akan ditunjukkan keberlakuan Prinsip Terurut Rapi $\mathbb{N}$.

Teorema 2.1 Misalkan rumus Induksi 1 berlaku di $\mathbb{N}$. Sebarang $A \subseteq \mathbb{N}$ dan $\emptyset \neq A$, mempunyai unsur terkecil.

Bukti. Ambil sebarang $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, dan andaikan A tidak memiliki unsur terkecil. Tulis $\mathcal{B} := \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}$. Andaikan $1 \notin \mathcal{B}$, ini berarti $1 \in A$. Karena 1 unsur terkecil $\mathbb{N}$, maka 1 juga unsur terkecil A. Hal tersebut merupakan suatu kontradiksi, sehingga kita simpulkan $1 \in \mathcal{B}$. Selanjutnya kita misalkan $x \in \mathcal{B}$, tetapi $x + 1 \notin \mathcal{B}$. Akibatnya $x \notin A$, tetapi $x + 1 \in A$, dan ini berarti $x + 1$ unsur terkecil A yang merupakan suatu kontradiksi. Sehingga kita perolah $x \in \mathcal{B}$, berakibat $x + 1 \in \mathcal{B}$.
Menurut rumus Induksi 1, kita simpulkan bahwa $\mathcal{B} = \mathbb{N}$. Dengan demikian $n \notin A$,$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ atau $A = \emptyset$. Kontradiksi. ∎

Teorema 2.2 Dalam himpunan bilangan alam $\mathbb{N}$ berlaku Prinsip Terurut Rapi, jika dan hanya jika rumus Induksi 1 juga berlaku di dalamnya.

Bukti. Misalkan dalam $\mathbb{N}$ berlaku Prinsip Terurut Rapi. Akan dibuktikan keberlakuan Rumus Induksi 1 di dalamnya. Misalkan kita punyai $1 \in S \subseteq \mathbb{N}$, dan $x \in S$, yang berakibat $x + 1 \in S$. Andaikan $S \neq \mathbb{N}$. Kita pilih $p \in \mathbb{N}$ tetapi $p \notin S$.Oleh karena $p \in S^C \neq \emptyset$, maka S^C mempunyai unsur terkecil, sebut saja q, dan ini mengakibatkan $q - 1 \in S$. Tetapi dari sifat S, kita akan sampai kepada $q \in S$, dan ini adalah suatu kontradiksi.
Sebaliknya, misalkan dalam $\mathbb{N}$ berlaku Rumus Induksi 1. Akan dibuktikan keberlakuan Prinsip Terurut Rapi di dalam $\mathbb{N}$. Andaikan Prinsip Terurut Rapi tidak berlaku di $\mathbb{N}$, maka akan diperoleh $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, dengan A tidak mempunyai unsur terkecil. Misalkan kita definisikan

$$B \coloneqq \{r \in \mathbb{N} : r \notin A\}.$$

Oleh karena $1 \in B$, maka B mempunyai unsur terkecil. Misalkan $s \in B$ tetapi $s + 1 \notin B$. Kita punyai $s + 1 \in A$. Oleh karena $s \notin A$, maka $s + 1$ bertindak sebagai unsur terkecil A. Kontradiksi. Dengan demikian Prinsip Terurut Rapi berlaku di $\mathbb{N}$. Kita simpulkan bahwa Prinsip Terurut Rapi dan Rumus Induksi 1 ekivalen. ∎

4 Rumus Induksi Bentuk Lain

Dengan sedikit modifikasi pada rumus induksi 1, maka kita akan mendapatkan rumus berikut ini,

Teorema 3.1 (Induksi 2) Misalkan $a \in \mathbb{N}$ dan $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}_a := \{\mathrm{a}, \mathrm{a}+1, \mathrm{a}+2, \ldots\}$, dengan $a \in S$. Jika $x \in S$, mengakibatkan $x+1 \in S$, maka $S = \mathbb{N}_a$.

Bukti. Misalkan $a \in \mathbb{N}$ dan $N_a := \{a, a+1, a+2, a+3, \ldots\}$. Misalkan $a \in S \subseteq N_a$, dan $x \in S$ mengakibatkan $x+1 \in S$. Andaikan $S \neq N_a$. Kita pilih $q \in N_a$ dan $q \notin S$. Oleh karena $q \in S^C \neq \emptyset$ dan $S^C \subset N_a$, maka S^C memiliki unsur terkecil, yang kita sebut $d \in S^C$. Karena d unsur terkecil, maka $d-1 \in S$. Tetapi sifat yang dimiliki S akan menghasilkan $d \in S$ yang merupakan suatu kontradiksi. ■

Untuk keperluan aplikasi/penggunaan rumus induksi, kita punyai fakta berikut yang menyatakan ekivalensi rumus-rumus di atas.

Teorema 3.2 Dalam himpunan bilangan alam $\mathbb{N}$ berlaku rumus Induksi 1, jika dan hanya jika rumus Induksi 2 juga berlaku di dalamnya.

Bukti. Dalam hal $a = 1$ maka Rumus Induksi 2 mengakibatkan Rumus Induksi 1. Karena Rumus Induksi 1 ekivalen dengan Prinsip Terurut Rapi, maka Rumus Induksi 2 mengakibatkan Prinsip Terurut Rapi. ■

Untuk penjelasan terakhir, kita sampai kepada rumus induksi yang terakhir, biasa disebut *rumus Induksi Kuat*. Prinsip ini dapat dibuktikan melalui Prinsip Terurut Rapi $\mathbb{N}$ dan dapat dituliskan dengan bentuk sebagai berikut.

Teorema 3.3 (Induksi kuat) Misalkan $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in S$. Jika $\{1,2,3,\ldots,x\} \subset S$, mengakibatkan $x+1 \in S$, maka $S = \mathbb{N}$.

Bukti. Misalkan dalam $\mathbb{N}$ berlaku Prinsip Terurut Rapi, dan andaikan $S \neq \mathbb{N}$. Ini berarti $S^c \neq \emptyset$. Pilih $p \in S^c$ yang bertindak sebagai unsur terkecil S^c. Jelas bahwa $p > 1$. Oleh karena $p \in S^c$ adalah unsur terkecil S^c,$ maka $p-1 \notin S^c$, atau $p-1 \in S$. Oleh karena $1, p-1 \in S$, maka $\{1,2,3,\ldots,p-1\} \subset S$. Akibatnya $p \in S$. Kontradiksi, dan ini berarti $S = \mathbb{N}$. ■

5 Daftar Pustaka

[1] Gunderson, D.S., 2011, Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications, CRC Press.
[2] Rosen, K.H., 2019, Discrete Mathematics and Its Applications, McGraw-Hill Education.
[3] Valleman, D.J., 2006, How to Prove It, Cambridge University Press.