Contemporary Mathematics and Applications
Vol. 5, No. 2, 2023, pp. 64-78.

Resolving Independent Dominating Set pada Graf Bunga, Graf Gear, dan Graf Bunga Matahari

R M Prihandini[1], N A Az-Zahra[2], Dafik[3], A C Prihandoko[4], R Adawiyah[5]

[1,2,3,5]Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Jember, Indonesia
[4]Program Studi Ilmu Komputer, Universitas Jember, Indonesia

[5]Corresponding author Email: robiatul@unej.ac.id

Abstract. *Resolving independent dominating set is the development of metric dimension and independent dominating set. The set W is resolving independent dominating set for G if W is independent in G, and distinct vertices of G have distinct representations with respect to W. The minimum cardinality of resolving independent dominating set is called resolving independent domination number and denoted by γri(G). In this study, we examined the resolving independent dominating set of flower graphs, gear graphs, and sunflower graphs.*

Keywords: *Resolving Independent Dominating Set; Graf Bunga; Graf Gear; Graf Bunga Matahari*.

1 Pendahuluan

Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan (V, E) dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan terbatas, tak kosong dan terurut dari elemen yang disebut titik dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ merupakan himpunan terbatas, boleh kosong, dan tidak terurut dari dua titik yang disebut sisi [6]. Suatu graf berkemungkinan tidak memiliki satu sisi tetapi harus memiliki minimal satu titik, graf tersebut dinamakan graf *trivial* [1]. *Order* merupakan banyaknya titik dari sebuah graf yang dinotasikan dengan $|V(G)|$. *Size* merupakan banyaknya sisi dari sebuah graf yang dinotasikan dengan $|E(G)|$ [10]. Banyaknya sisi yang *incident* pada suatu titik disebut derajat dan dinotasikan dengan $d(v)$.

Konsep *metric dimension* pertama kali dikenalkan oleh Harary dan Melter, selain itu diteliti juga oleh Slater secara terpisah [7]. Misalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ merupakan suatu himpunan terurut dari titik pada graf G dan v adalah sebuah titik pada graf G, maka representasi titik v ke W merupakan sebuah $k-vector$ $(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$ [3]. Apabila setiap titik di graf G memiliki representasi berbeda terhadap W, maka W disebut *resolving set*. Kardinalitas minimum dari *resolving set* dinamakan *metric dimension* dan dinotasikan dengan $dim(G)$[5].

Himpunan D pada titik graf sederhana G disebut dengan *dominating set* apabila setiap titik $v \in (G) - D$ yang tidak bertetangga pada beberapa titik $v \in D$ [2]. Himpunan D dinamakan *independent dominating set* apabila setiap titik di D tidak bertetangga dengan titik lainnya [4]. Kardinalitas minimum dari *independent dominating set* dinamakan *independent domination number* dan dinotasikan dengan $\gamma_i(G)$. *Resolving independent dominating set* merupakan gabungan dari *konsep independent dominating set* dan *metric dimension*. *Resolving independent dominating set* memiliki syarat bahwa setiap titik yang menjadi dominator tidak boleh bertetangga satu sama lain. Pada penelitian sebelumnya, telah diteliti *independent dominating set* beberapa macam graf, yaitu graf lintasan (P_n), graf *cycle* (C_n), graf persahabatan (F_n), graf helm (H_n), dan graf kipas (f_n) [5].

2 Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksian pola [6].

a) Metode deduktif aksiomatik
   Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menerapkan prinsip-prinsip pembuktian deduktif (dari hal umum ke khusus) yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma, lemma, dan teorema yang ada untuk memecahkan suatu permasalahan pada topik yang diteliti. Penelitian ini nantinya akan diperoleh beberapa teorema atau definisi yang didapatkan dari hasil analisis lebih lanjut dari beberapa teorema atau definisi yang ada sebelumnya [8].
b) Metode pendeteksian pola
   Metode pendeteksian pola merupakan metode penelitian guna mencari pola *resolving independent dominating set* pada graf yang diteliti [9].

3 Hasil dan Diskusi

Berikut akan dibahas mengenai *resolving independent dominating set* dari graf bunga (Fl_n), graf gear (G_n), dan graf bunga matahari (SF_n) yang akan disajikan dalam beberapa teorema dan pembuktian sebagai berikut.

Teorema 1. Jika (Fl_n) merupakan graf bunga dengan $n \geq 3$, maka

$$\gamma_{ri}(Fl_n) = n$$

Bukti: Graf bunga (Fl_n) merupakan graf dengan himpunan titik $V(Fl_n) = \{z\} \cup \{x_i,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j,; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Fl_n) = \{zx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq i \backslash j \leq n\} \cup \{x_1 x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$. Kardinalitas dari himpunan sisi dan himpunan titik dari graf bunga (Fl_n) berturut-turut adalah $|V(Fl_n)| = 2n + 1$ dan $|E(Fl_n)| = 4n$. (Fl_n) memiliki dimensi metrik yaitu $dim(Fl_n) = n$ untuk $n = 3$ dan $dim(Fl_n) = n - 1$ untuk $n \geq 4$. Jadi kita mempunyai 2 kasus, kasus pertama adalah saat $n = 3$ dan kasus kedua adalah saat $n \geq 4$.

Kasus 1. $\gamma_{ri}(Fl_n) = n,\ jika\, n = 3$ akan dibuktikan dengan menunjukkan batas bawah $\gamma_{ri}(Fl_n) \geq n$ dan batas atas $\gamma_{ri}(Fl_n) \leq n$. Pertama, kita akan membuktikan batas atas *resolving independent dominating number* dari (Fl_n). Kita memilih $W = \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ jadi kita memiliki $|W| = n$. Akibatnya terdapat beberapa kondisi:

i. Tetangga dari himpunan titik W terhadap $v \in V(Fl_n) - W$ adalah $N(y_j) = \{z, x_i; 1 \leq i \leq n\}$
ii. Semua titik di $v \in V(Fl_n) - W$ didominasi oleh titik-titik di W dan tidak ada titik-titik di W yang saling bertetangga, hal ini berarti bahwa W adalah *independent dominating set*
iii. Titik di (Fl_n) memiliki representasi yang berbeda di W. Jadi W merupakan *resolving set*. Untuk mengetahui apakah representasi setiap titik di W berbeda satu sama lain, kita dapat melihat representasi semua titik pada (Fl_n) dengan *resolving independent dominating set* pada Tabel 1.

Berdasarkan beberapa kondisi di atas, dapat disimpulkan bahwa batas atas dari *resolving independent domination number* dari Fl_n adalah $\gamma_{ri}(Fl_n) \leq n$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari $\gamma_{ri}(Fl_n) \geq n$. Berdasarkan (ii) kita dapatkan bahwa $dim(Fl_n) = n$, jadi kita mempunyai $\gamma_r(Fl_n) = dim(Fl_n)$. Dengan demikian, kita dapatkan batas bawah dari *resolving independent domination number* dari Fl_n sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\gamma_{ri}(Fl_n) &\geq \max\ \{\gamma_i(Fl_n), dim(Fl_n)\} \\ &= \max\ \{n, n\} \\ &= n\end{aligned}$$

Berdasarkan analisis tersebut, didapatkan batas bawah $\gamma_{ri}(Fl_n) \geq n$ dan batas atas $\gamma_{ri}(Fl_n) \leq n$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving domination number* dari graf bunga (Fl_n) saat $n = 3$ adalah $\gamma_{ri}(Fl_n) = n$.

Kasus 2. $\gamma_{ri}(Fl_n) = n,\ jika\, n \geq 4$ akan dibuktikan dengan menunjukkan batas bawah $\gamma_{ri}(Fl_n) \geq n$ dan batas atas $\gamma_{ri}(Fl_n) \leq n$. Pertama, kita akan membuktikan batas atas *resolving independent dominating number* dari (Fl_n). Kita memilih $W = \{y_j; 1 \le j \le n\}$ jadi kita memiliki $|W| = n$. Akibatnya terdapat beberapa kondisi:

i. Tetangga dari himpunan titik W terhadap $v \in V(Fl_n) - W$ adalah $N(y_j) \sim \{z, x_i; 1 \le i \le n\}$

ii. Semua titik di $v \in V(Fl_n) - W$ didominasi oleh titik-titik di W dan tidak ada titik-titik di W yang saling bertetangga, hal ini berarti bahwa W adalah *independent dominating set*

iii. Titik di (Fl_n) memiliki representasi yang berbeda di W. Jadi W merupakan *resolving set*. Untuk mengetahui apakah representasi setiap titik di W berbeda satu sama lain, kita dapat melihat representasi semua titik pada (Fl_n) dengan *resolving independent dominating set* pada Tabel 1.

Berdasarkan beberapa kondisi di atas, dapat disimpulkan bahwa batas atas dari *resolving independent domination number* dari Fl_n adalah $\gamma_{ri}(Fl_n) \le n$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari $\gamma_{ri}(Fl_n) \ge n$. Berdasarkan (ii) kita dapatkan bahwa $i(Fl_n) = n$, jadi kita mempunyai $\gamma_r(Fl_n) = i(Fl_n)$. Dengan demikian, kita dapatkan batas bawah dari *resolving independent domination number* dari Fl_n sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \gamma_{ri}(Fl_n) &\ge \max\{\gamma_i(Fl_n), dim(Fl_n)\} \\ &= \max\{n, n-1\} \\ &= n \end{aligned}$$

Kita telah membuktikan batas bawah $\gamma_{ri}(Fl_n) \ge n$ dan batas atas $\gamma_{ri}(Fl_n) \le n$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving domination number* dari graf bunga (Fl_n) saat $n \ge 4$ adalah $\gamma_{ri}(Fl_n) = n$.

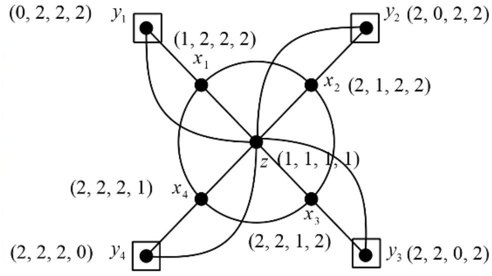
Pada Tabel 1 berikut diberikan representasi titik dari graf bunga (Fl_n).

Tabel 1. Representasi dari $v \in V(Fl_n) - W$

n	$d(v\|W)$
z	$\left(\underbrace{1,1,1,\ldots,1}_{n}\right)$
x_1	$\left(1, \underbrace{2,2,\ldots,2}_{n-1}\right)$

n	$d(v\|W)$
x_2	$\left(2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-2}\right)$
x_3	$\left(2,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3}\right)$
$\vdots$	
x_i	$\left(\underbrace{2,2,\dots,2}_{i-1},1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-i}\right)$
x_n	$\left(\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-1},1\right)$
y_1	$\left(0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-1}\right)$
y_2	$\left(2,0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-2}\right)$
y_3	$\left(2,2,0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3}\right)$
y_j	$\left(\underbrace{2,2,\dots,2}_{j-1},0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-j}\right)$
y_n	$\left(\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-1},0\right)$

Pada Gambar 1 diberikan *resolving independent dominating set* dari graf bunga (Fl_n).



Gambar 1 *Resolving Independent Dominating Set* Graf Bunga (Fl_n)

Teorema 2. Jika (G_n) merupakan graf gear dengan $n \geq 3$, maka

$$\gamma_{ri}(G_n) = \begin{cases} n, & n = 3 \\ n-1, & x \geq 4 \end{cases}$$

Bukti: Graf gear (G_n) memiliki himpunan titik $V(G_n) = \{z\} \cup \{x_i, ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j, ; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(G_n) = \{zx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_1 y_j; 2 \leq j \leq n; j = i - 1\} \cup \{x_1 y_n\}$. Kardinalitas dari himpunan sisi $|V(G_n)| = 2n + 1$ dan kardinalitas dari himpunan titik dari graf gear (G_n) adalah $|E(G_n)| = 3n$. Dalam membuktikan teorema ini kita menggunakan 2 kasus, kasus pertama adalah saat $n = 3$ dan kasus kedua adalah saat $n \geq 4$. Teorema ini akan dibuktikan dengan menentukan batas bawah dan batas atas dari *resolving independent dominating set* pada graf gear .

Kasus 1. Untuk membuktikan $\gamma_r(G_n) = n,\ jika\, n = 3$ kita harus membuktikan batas bawah $\gamma_r(G_n) \geq n$ dan batas atas $\gamma_r(G_n) \leq n$. Pertama, kita akan membuktikan batas atas *resolving independent dominating number* dari G_n. Kita memilih $W = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ jadi kita memiliki $|W| = n$. Akibatnya terdapat beberapa kondisi:

i. Tetangga dari himpunan titik W terhadap $v \in V(G_n) - W$ adalah $N(x_i) \sim \{z, y_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan $N(y_j) \sim \{z, x_i, x_{i+1}; 1 \leq i \leq n, i = j\}$
ii. Semua titik di $v \in V(G_n) - W$ didominasi oleh titik-titik di W dan tidak ada titik-titik di W yang bertetangga satu sama lain, hal ini berarti bahwa W adalah *independent dominating set*
iii. Titik di (G_n) memiliki representasi yang berbeda di W. Untuk mengetahui apakah representasi setiap titik di W berbeda satu sama lain, kita dapat melihat representasi semua titik pada G_n dengan *resolving independent dominating set* pada Tabel 2.

Berdasarkan representasi di atas, dapat disimpulkan bahwa W merupakan *resolving independent dominating set*.

Berdasarkan beberapa kondisi di atas, dapat disimpulkan bahwa batas atas dari *resolving independent domination number* dari G_n adalah $\gamma_{ri}(G_n) \leq n$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari $\gamma_{ri}(G_n) \geq n$:

$$\begin{aligned} \gamma_r(G_n) &\geq \max\{\gamma(G_n), dim(G_n)\} \\ &= \max\{n, n\} \\ &= n \end{aligned}$$

Kita telah membuktikan batas bawah $\gamma_{ri}(G_n) \geq n$ dan batas atas $\gamma_{ri}(G_n) \leq n$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving independent domination number* dari graf gear (G_n) saat $n = 3$ adalah $\gamma_{ri}(G_n) = n$.

Kasus 2. $\gamma_{ri}(G_n) = n - 1,\ jika\, n \geq 4$ akan dibuktikan dengan menunjukkan batas bawah $\gamma_{ri}(G_n) \geq n - 1$ dan batas atas $\gamma_{ri}(G_n) \leq n - 1$. Pertama, kita akan membuktikan batas atas *resolving independent dominating number* dari G_n. Kita memilih $W = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ jadi kita memiliki $|W| = n - 1$. Akibatnya terdapat beberapa kondisi:

i. Tetangga dari himpunan titik W terhadap $v \in V(G_n) - W$ adalah $N(x_i) \sim \{z, x_{i-1}, x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ dan $N(y_j) \sim \{z, x_i, x_{i+1}; 1 \leq i \leq n, i = j\}$
ii. Semua titik di $v \in V(G_n) - W$ didominasi oleh titik-titik di W dan tidak ada titik-titik di W yang tidak terdominasi, hal ini berarti bahwa W adalah *independent dominating set*.
iii. Titik di (G_n) memiliki representasi yang berbeda di W. Untuk mengetahui apakah representasi setiap titik di W berbeda satu sama lain, kita dapat melihat representasi semua titik pada G_n dengan *resolving independent dominating set* pada Tabel 2:

Berdasarkan representasi di atas, dapat disimpulkan bahwa W merupakan *resolving independent dominating set*.

Berdasarkan beberapa kondisi di atas, dapat disimpulkan bahwa batas atas dari *resolving independent domination number* dari G_n adalah $\gamma_{ri}(G_n) \leq n - 1$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari $\gamma_{ri}(G_n) \geq n - 1$:

$$\gamma_{ri}(G_n) \geq \max\ \{\gamma_i(G_n), dim(G_n)\}$$
$$= \max\ \{n - 1, n - 1\}$$
$$= n - 1$$

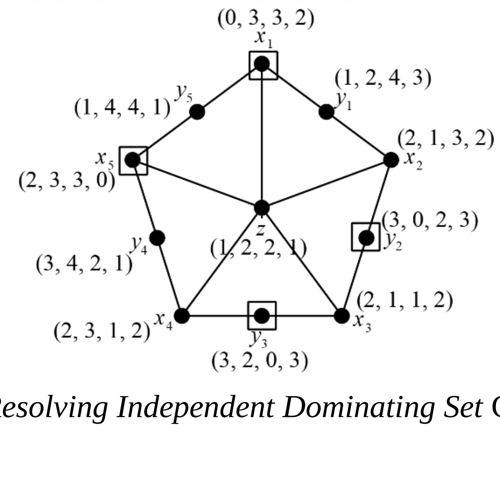
Kita telah membuktikan batas bawah $\gamma_{ri}(G_n) \geq n - 1$ dan batas atas $\gamma_{ri}(G_n) \leq n - 1$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving independent domination number* dari graf gear (G_n) saat $n \geq 4$ adalah $\gamma_{ri}(G_n) = n - 1$. Berikut tabel representasi titik dari graf gear (G_n).

Tabel 2. Representasi dari $v \in V(G_n) - W$

n	$d(v\|W)$
z	$\left(1, \underbrace{2,2, \ldots, 2}_{n-3}\right)$
x_1	$\left(0, \underbrace{3,3, \ldots,}_{n-3} 3,2\right)$
x_2	$\left(2,1, \underbrace{3,3, \ldots, 3}_{n-4}, 2\right)$

n	$d(v|W)$
x_3	$\left(2,3,1,1,\underbrace{3,3,\dots,3}_{n-5},2\right)$
x_i	$\left(2,\underbrace{3,3,\dots,3}_{i-3},1,1,\underbrace{3,3,\dots,3}_{n-i-2},2\right)$
x_{n-1}	$\left(2,\underbrace{3,3,\dots,3}_{n-4},1,2\right)$
x_n	$\left(2,\underbrace{3,3,\dots,3}_{n-3},0\right)$
y_1	$\left(1,2,\underbrace{4,4,\dots,4}_{n-4},3\right)$
y_2	$\left(3,0,2,\underbrace{4,4,\dots,4}_{n-5},3\right)$
y_3	$\left(3,2,0,2,\underbrace{4,4,\dots,4}_{n-6},3\right)$
$\vdots$	
y_j	$\left(3,\underbrace{4,4,\dots,4}_{j-3},2,0,2,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-j}\right)$
y_{n-1}	$\left(3,\underbrace{4,4,\dots,4}_{n-4},2,1\right)$
y_n	$\left(1,\underbrace{4,4,\dots,4}_{n-3},1\right)$

Berikut gambar *resolving independent dominating set* dari graf gear (G_n).



Gambar 2 *Resolving Independent Dominating Set* Graf Gear (G_n)

Teorema 3. Jika (SF_n) merupakan graf bunga matahari dengan $n \geq 5$, maka

$$\gamma_{ri}(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Bukti: Graf bunga matahari (SF_n) memiliki himpunan titik $V(SF_n) = \{z\} \cup \{x_i, ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j, ; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(SF_n) = \{zx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_1 y_j; 2 \leq j \leq n; j = i-1\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_1 y_n\}$.
Kardinalitas dari himpunan sisi $|V(SF_n)| = 2n + 1$ dan kardinalitas dari himpunan titik dari graf bunga matahari (SF_n) adalah $|E(SF_n)| = 4n$. SF_n memiliki dimensi metrik yaitu $dim(SF_n) = 3$ untuk $n = 5,6,7$ dan $dim(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 8$. Jadi kita mempunyai 2 kasus, kasus pertama adalah saat $n = 5,6,7$ dan kasus kedua adalah saat $n \geq 8$. Teorema ini akan dibuktikan dengan menentukan batas bawah dan batas atas.

Kasus 1. $\gamma_{ri}(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $jika\ n \geq 5$ akan dibuktikan dengan menunjukkan batas bawah $\gamma_{ri}(SF_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan batas atas $\gamma_{ri}(SF_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Pertama, kita akan membuktikan batas atas *resolving independent dominating number* dari SF_n. Kita memilih $W = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ jadi kita memiliki $|W| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Akibatnya terdapat beberapa kondisi:

i. Tetangga dari himpunan titik W terhadap $v \in V(SF_n) - W$ adalah $N(x_i) \sim \{z, y_j; 1 \leq j \leq n\}$
ii. Semua titik di $v \in V(SF_n) - W$ didominasi oleh titik-titik di W dan tidak ada titik-titik di W yang bertetangga satu sama lain, hal ini berarti bahwa W adalah *independent dominating set*
iii. Titik di (SF_n) memiliki representasi yang berbeda di W. Untuk mengetahui apakah representasi setiap titik di W berbeda satu sama lain, kita dapat melihat representasi semua titik pada SF_n dengan *resolving independent dominating set* pada Tabel 3 dan Tabel 4.

Berdasarkan representasi di atas, dapat disimpulkan bahwa W merupakan *resolving independent dominating set.*

Berdasarkan beberapa kondisi di atas, dapat disimpulkan bahwa batas atas dari *resolving independent domination number* dari SF_n adalah $\gamma_{ri}(SF_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari $\gamma_{ri}(SF_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$:

$$\gamma_{ri}(SF_n) \geq \gamma_i \max\{(SF_n), dim(SF_n)\}$$

$$= \max\left\{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, 3\right\}$$

$$= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Kita telah membuktikan batas bawah $\gamma_{ri}(SF_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan batas atas $\gamma_{ri}(SF_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving independent domination number* dari graf bunga matahari (SF_n) saat $n = 5,6,7$ adalah $\gamma_{ri}(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Kasus 2. $\gamma_{ri}(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\ jika\ n \geq 5$ akan dibuktikan dengan menunjukkan batas bawah $\gamma_{ri}(SF_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan batas atas $\gamma_{ri}(SF_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Pertama, kita akan membuktikan batas atas *resolving independent dominating number* dari graf bunga matahari. Kita memilih $W = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ jadi kita memiliki $|W| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Akibatnya terdapat beberapa kondisi:

i. Tetangga dari himpunan titik W terhadap $v \in V(SF_n) - W$ adalah $N(x_i) = \{z, y_j; 1 \leq j \leq n\}$
ii. Semua titik di $v \in V(SF_n) - W$ didominasi oleh titik-titik di W dan tidak ada titik-titik di W yang bertetangga satu sama lain, hal ini berarti bahwa W adalah *independent dominating set*
iii. Titik di (SF_n) memiliki representasi yang berbeda di W. Untuk mengetahui apakah representasi setiap titik di W berbeda satu sama lain, kita dapat melihat representasi semua titik pada SF_n dengan *resolving independent dominating set* pada Tabel 3 dan Tabel 4.

Berdasarkan representasi di atas, dapat disimpulkan bahwa W merupakan *resolving independent dominating set*.

Berdasarkan beberapa kondisi di atas, dapat disimpulkan bahwa batas atas dari *resolving independent domination number* dari SF_n adalah $\gamma_{ri}(SF_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari $\gamma_{ri}(SF_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$:

$$\begin{aligned} \gamma_{ri}(SF_n) &\geq \gamma_i \max\{(SF_n), dim(SF_n)\} \\ &= \max\left\{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right\} \\ &= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

Kita telah membuktikan batas bawah $\gamma_{ri}(SF_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan batas atas $\gamma_{ri}(SF_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving independent domination number* dari graf bunga matahari (SF_n) saat $n \geq 8$ adalah $\gamma_{ri}(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Berikut tabel representasi titik dari graf bunga matahari (SF_n).

Tabel 3. Representasi dari $\boldsymbol{v \in V(SF_n) - W, n =}$ ganjil

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{d(v\vert W)}$	**Keterangan**
z	$\left(\underbrace{1,1,\dots,1}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor},2\right)$	$n \geq 5$
x_1	$\left(0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\right)$	$n \geq 5$
x_2	$\left(1,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-2},3\right)$	$n \geq 5$
x_3	$\left(2,0,,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-2},3\right)$	$n \geq 5$
$\vdots$		
x_i	$\left(\underbrace{2,2,\dots,2}_{\frac{i}{2}-1},1,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\lfloor\frac{n-2-i}{2}\rfloor},3\right)$	i genap
x_i	$\left(\underbrace{2,2,\dots,2}_{\lceil\frac{i}{2}\rceil-1},0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\lceil\frac{n-2-i}{2}\rceil},3\right)$	i ganjil
x_{n-1}	$\left(\underbrace{2,2,\dots,2}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1},1,1\right)$	n ganjil
x_n	$\left(1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1},1\right)$	n ganjil
y_1	$\left(1,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1},2\right)$	$n \geq 5$
y_2	$\left(1,2,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}\right)$	$n \geq 5$
y_3	$\left(2,1,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-2},4\right)$	$n \geq 5$
$\vdots$		

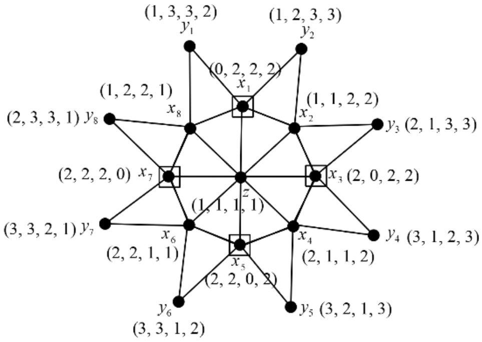
n	$d(v\|W)$	Keterangan
y_j	$\left(\underbrace{3,3,\dots,3}_{\frac{j}{2}-1},1,2,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\left\lfloor\frac{n-2-j}{2}\right\rfloor},4\right)$	j ganjil
y_j	$\left(\underbrace{3,3,\dots,3}_{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor-1},2,1,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\left\lceil\frac{n-2-j}{2}\right\rceil},4\right)$	j ganjil
y_{n-1}	$\left(\underbrace{3,3,\dots,3}_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1},1,2\right)$	n ganjil
y_n	$\left(2,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2},2,0\right)$	n ganjil
y_{n-1}	$\left(\underbrace{3,3,\dots,3}_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1},1,2\right)$	n ganjil
y_n	$\left(2,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2},2,0\right)$	n ganjil

Tabel 4. Representasi dari $v \in V(SF_n) - W, n =$ genap

n	$d(v\|W)$	Keterangan
z	$\left(\underbrace{1,1,\dots,1}_{\frac{n}{2}}\right)$	$n \geq 5$
x_1	$\left(0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\frac{n}{2}-1}\right)$	$n \geq 5$
x_2	$\left(1,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\frac{n}{2}-2}\right)$	$n \geq 5$
x_3	$\left(2,0,,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\frac{n}{2}-2}\right)$	$n \geq 5$
$\vdots$		

n	$d(v\|W)$	**Keterangan**
x_i	$\left(\underbrace{2,2,\dots,2}_{\frac{i}{2}-1},1,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\frac{n-2-i}{2}}\right)$	i genap
x_i	$\left(\underbrace{2,2,\dots,2}_{\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil-1},0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\left\lceil\frac{n-2-i}{2}\right\rceil}\right)$	i ganjil
x_{n-1}	$\left(\underbrace{2,2,\dots,2}_{\frac{n}{2}-1},0\right)$	n genap
x_n	$\left(1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{\frac{n}{2}-2},1\right)$	n genap
y_1	$\left(1,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\frac{n}{2}-2},2\right)$	$n \geq 5$
y_2	$\left(1,2,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\frac{n}{2}-2}\right)$	$n \geq 5$
y_3	$\left(2,1,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\frac{n}{2}-2}\right)$	$n \geq 5$
$\vdots$		
y_j	$\left(\underbrace{3,3,\dots,3}_{\frac{j}{2}-1},1,2,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\frac{n-2-j}{2}}\right)$	j ganjil
y_j	$\left(\underbrace{3,3,\dots,3}_{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor-1},2,1,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\left\lceil\frac{n-2-j}{2}\right\rceil}\right)$	j ganjil
y_{n-1}	$\left(\underbrace{3,3,\dots,3}_{\frac{n}{2}-2},0\right)$	n genap
y_n	$\left(2,\underbrace{3,3,\dots,3}_{\frac{n}{2}-2},1\right)$	n genap

Berikut gambar *resolving independent dominating set* dari graf bunga matahari (SF_n).



Gambar 3 *Resolving Independent Dominating Set* Graf Bunga Matahari (SF_n)

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil di atas, diperoleh teorema baru *resolving independent dominating set* untuk graf khusus. *Resolving independent domination number* pada graf bunga (Fl_n) dengan $n \geq 3$ adalah $\gamma_{ri}(Fl_n) = n$, *resolving independent domination number* pada graf gear (G_n) dengan $n \geq 3$ adalah $\gamma_{ri}(G_n) = \begin{cases} n, & n = 3 \\ n-1, & x \geq 4 \end{cases}$, *resolving independent domination number* pada graf bunga matahari (SF_n) dengan $n \geq 5$ adalah $\gamma_{ri}(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

5 Daftar Pustaka

[1] Adawiyah, R., Prihandini, R. M., Albirri, E. R., Agustin, I. H. & Alfarisi, R., 2019, *The local multiset dimension of unicyclic graph*, in IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, IOP Publishing (Vol. 243, No. 1, p. 012075).

[2] Az-Zahra, N. A., Dafik, D. & Prihandini, R. M., 2023, *Resolving Dominating Set pada Graf Bunga dan Graf Roda*, CGANT JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS, **4**(1).

[3] Alfarisi, R., Dafik, & Kristiana, A. I., 2019, *Resolving domination number of graphs*, Discrete Mathematics, Algorithms, and Application, **11**(6), 1950071.

[4] Dafik, Agustin, I. H., Wardani, D. A., & Kurniawati, E. Y., 2017, *A study of local domination number of $S_n \trianglerighteq H$ graph*. Journal of Physics: Conference Series, **943**(1), 012003.

[5] Dafik, Slamin, Agustin, I. H., Retnowardani, D. A. & Kurniawati, E. Y., 2021, *On the resolving strong domination number of graphs: a new notion*. Journal of Physics: Conference Series, **1836**(1), 012019.

[6] Mazidah, T., Dafik, Slamin, Agustin, I. H. & Nisviasari, R., 2021, *Resolving independent domination number of some special graphs*, Journal of Physics: Conference Series, **1832**(1), 012022.

[7] Prihandini, R. M. & Adawiyah, R., 2023, *On Super (3n+5,2)-Edge Antimagic Total Labeling and Its Application to Construct Hill Chiper Algorithm*. BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, **17**(1), 0029-0036.

[8] R. H., Dafik, Kristiana, A. I., Agustin, I. H. & Kurniawati, E. Y., 2022, *On the resolving strong domination number of some wheel related graphs*, Journal of Physics: Conference Series, **2157**(1), 012015.

[9] Rofiah, M. & Dafik, 2014, *Kajian himpunan dominasi pada graf khusus dan operasinya*, in Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, pp. 191-6.

[10] Slamin, 2009, *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf* , Universitas Jember.