Contemporary Mathematics and Applications
Vol. 5, No. 2, 2023, pp. 88-101.

# Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal pada Hasil Operasi Amalgamasi Titik Graf Lintasan

**Rafelita Faradila Sandi[1], Arika Indah Kristiana[2], Lioni Anka Monalisa[3], Slamin[4] & Robiatul Adawiyah[5]**

[1,2,3,4,5] Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Jember

[2]Corresponding author Email: arika.fkip@unej.ac.id

**Abstract.** *Definition of graph is set pair* $\left(V(G), E(G)\right)$ *where* $V(G)$ *is vertex set and* $E(G)$ *is edge set. A maping* $I: V(G) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ *as label function and weight function* $w: V(G) \rightarrow N$ *is desined as* $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$*. The function* $w$ *is called local irregularity vertex coloring if: (i)* $opt(l) = min\ (maks\ (l_i)\ ; l_i\ is\ label\ function)$ *dan (ii) for every* $uv \in E(G), w(u) \neq w(v)$*. The chromatic number of local irregularity vertex coloring denoted by* $\chi_{lis}(G)$ *is defined as* $\chi_{lis}(G) = min\{\left|w\left(V(G)\right)\right|; w\ is\ local\ irregularity\ vertex\ coloring\}$*. The method used in this paper is pattern recognition and axiomatic deductive method. In this paper, we learn local irregularity vertex coloring of vertex amalgamation of path graph and determine the chromatic number on local irregularity vertex coloring of vertex amalgamation of path graph. This paper use vertex amalgamation of path graph* $\left(amal(P_n, v, m)\right)$*. The result of this study are expected to be used as basic studies and science development as well as applications related to local irregularity vertex coloring of vertex amalgamation of path graph.*

**Keywords:** *local irregularity vertex coloring, local irregularity vertex coloring of vertex amalgamation of path graph, vertex amalgamation.*

## 1 Pendahuluan

Ilmu matematika merupakan salah satu ilmu yang dapat diterapkan diberbagai bidang ilmu dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu cabang ilmu matematika yaitu teori graf. Sebuah graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan $\left(V(G), E(G)\right)$ dimana $V(G)$ merupakan himpunan berhingga yang tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik, sedangkan $E(G)$ merupakan sebuah himpunan yang boleh kosong dari pasangan tak terurut $u, v$ dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi [1]. Salah satu topik dari teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf merupakan pemberian warna yang berbeda pada titik, sisi atau wilayah pada suatu graf. Terdapat 3 jenis pewarnaan yang digunakan pada graf antara lain pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah.

Pada artikel ini akan membahas mengenai pewarnaan titik pada graf $G$. Pewarnaan titik merupakan pemberian warna pada setiap titik pada suatu graf $G$ sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang saling berdekatan mempunyai warna yang sama [2]. Dalam pewarnaan graf terdapat istilah bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Bilangan kromatik merupakan jumlah warna minimum pada graf $G$ sehingga dua titik, sisi atau wilayah yang bertetangga memiliki warna yang berbeda [7]. Terdapat kasus khusus dalam pewarnaan graf yaitu pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal dilakukan dengan meminimumkan label titik pada graf dan meminimumkan jumlah warna titik pada graf. Kristiana dkk. (2019) [3] mendefinisikan pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf dan menemukan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal dari beberapa graf yaitu graf lintasan, graf siklus, graf lengkap, graf bintang, dan graf persahababatan. Penelitian terkait pewarnaan titik ketakteraturan lokal terus berkembang, tidak hanya pada graf-graf dasar tetapi juga menggunakan hasil operasi. Penggunaan graf hasil operasi pada pewarnaan titik ketakteraturan lokal telah dilakukan penelitian oleh Mursyidah dkk. (2021) [5] pada graf hasil operasi *comb*.

Operasi graf merupakan cara untuk memperoleh susunan graf baru dengan melakukan suatu operasi pada dua graf [8]. Pada artikel ini, akan mengkaji operasi amalgamasi titik. Operasi amalgamasi titik merupakan perolehan graf baru yang didapatkan dari beberapa hasil salinan graf tertentu dan pada setiap salinan dipilih satu titik yang akan ditempelkan pada satu titik tertentu yang disebut titik tetap. Penelitian ini memilih menggunakan operasi amalgamasi titik karena susunan graf dasar yang digunakan tidak berubah ketika graf tersebut dioperasikan, hal ini membuat pola pewarnaan dari graf tersebut tidak jauh berbeda dengan graf dasarnya. Penelitian sebelumnya terkait operasi amalgamasi titik yaitu Citra dkk. (2021) [6] meneliti bilangan kromatik pewarnaan *packing* hasil operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon.

Tujuan dari artikel ini yaitu untuk menemukan bilangan kromatik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada hasil operasi amalgamasi graf lintasan. Pada artikel ini juga didapatkan hubungan antara bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf lintasan dengan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf hasil operasi amalgamasi titik dari graf lintasan tersebut.

Pada artikel ini, terdapat definisi, lemma, proposisi dan observasi yang digunakan untuk memudahkan dalam menemukan pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Definisi, lemma, proporsisi dan observasi ditunjukkan sebagai berikut:

**Definisi 1.** [3] *Misalkan* $I: V(G) \to \{1,2,\dots,k\}$ *merupakan fungsi label dan fungsi bobot* $w: V(G) \to N$ *didefinisikan sebagai* $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$ *Fungsi* $w$ *disebut pewarnaan titik ketakteraturan lokal jika:*

*i.* $opt(l) = min\{maks(l_i); l_i: fungsi\ label\}$

*ii.* *untuk setiap* $uv \in E(G), w(u) \neq w(v)$

**Definisi 2.** [3] *Bilangan kromatik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal dinotasikan dengan*

$$\chi_{lis}(G) = min\{|w(V(G))|; w\ pewarnaan\ titik\ ketakteraturan\ lokal\}$$

**Lemma 1.** [3] *Untuk graf* $G$, $\chi_{lis}(G) \geq \chi(G)$

**Observasi 1.** [4] *Graf terubung* $G$, *bila setiap dua titik yang berdekatan memiliki derajat yang berbeda maka* $opt(l) = 1$

**Obsevasi 2.** [4] *Graf terhubung* $G$, *bila dua titik yang berdekatan memiliki derajat yang sama maka* $opt(l) \geq 2$

**Proposisi 1.** *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf lintasan* $(P_n)$ *dengan adalah*

$$\chi_{lis}(P_n) = \begin{cases} 2, & n = 2,3 \\ 3, & n \geq 4 \end{cases}$$

**Observasi 3.** *Misalkan graf* $G$ *adalah graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan* $(amal(P_n, v, m))$ *dengan* $n \geq 2$ *dan* $m \geq 2$, *maka bilangan kromatik* $amal(P_n, v, m)$ *adalah* $\chi(\ amal(P_n, v, m)) = 2$.

## 2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode pendeteksian pola dan metode deduktif aksiomatik. Metode pendeteksian pola adalah metode yang digunakan untuk merumuskan pola dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada hasil operasi amalgamasi titik keluarga graf pohon. Sedangkan metode deduktif aksiomatik adalah metode dengan menggunakan prinsip–prinsip deduktif yang telah ada pada logika matematika dengan aksioma, teorema dan lemma yang ada kemudian diterapkan dalam pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada hasil operasi amalgamasi titik keluarga graf pohon.

## 3 Hasil dan Pembahasan

**Teorema 1.** *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan* $amal(P_n, v, m)$ *dengan* $n = 3$ *dan* $m \geq 3$ *adalah*

$$\chi_{lis}(amal(P_n, v, m)) = 3$$

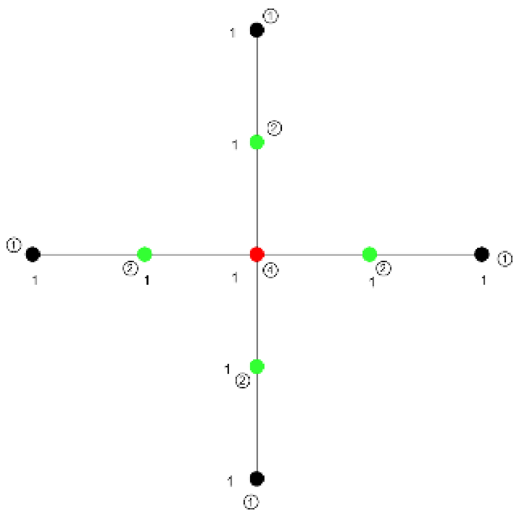
**Bukti.** Graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $(amal(P_n, v, m))$ memiliki himpunan titik $V(G) = \{x_j^i | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{v\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{vx_1^i, x_j^i x_{j+1}^i | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2\}$. Setiap titik yang berdekatan pada graf

$amal(P_n, v, m)$ memiliki derajat yang berbeda. Berdasarkan Observasi 1, diperoleh $opt(l) = 1$. Selanjutnya, dibuktikan batas bawah bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Berdasarkan Lemma 1 dan Observasi 3 didapatkan $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) \geq \chi\big(amal(P_n, v, m)\big) = 2$. Asumsikan $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 2$. Jika $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 2$, maka terdapat dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama. Hal ini kontradiksi dengan Definisi 1. Sehingga batas bawah graf $amal(P_n, v, m)$ adalah $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) \geq 3$. Selanjutnya dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal. Didefinisikan fungsi label $l: V\big(amal(P, v, m)\big) \to \{1\}$ dengan $l\big(v_{i,j}\big) = 1$. Oleh karena itu, didapatkan fungsi bobot titik graf $amal(P_n, v, m)$ sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
w(v) &= m \\
w\big(x_j^i\big) &= \begin{cases} 1, & untuk\ j = n-1, 1 \leq i \leq m \\ 2, & untuk\ j = 1, 1 \leq i \leq m \end{cases}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan fungsi bobot diatas, didapatkan $\left|w\left(V\big(amal(P_n, v, m)\big)\right)\right| = 3$. Sehingga didapatkan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf $amal(P_n, v, m)$ adalah $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) \leq 3$. Berdasarkan batas atas dan batas bawah yang telah diperoleh, didapatkan $3 \leq \chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) \leq 3$. Jadi dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan untuk $m \geq 3, n = 3$ adalah $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 3$. ■

Berikut ini contoh gambar pewarnaan ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan untuk $m \geq 3, n = 3$



*Gambar 1 Pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf* $amal(P_3, v, 4)$

**Teorema 2.** *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $amal(P_n, v, m)$ dengan $n \geq 4$ dan $m = 3$ adalah*

$$\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 3$$

**Bukti.** Graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\big(amal(P_n, v, m)\big)$ memiliki himpunan titik $V(G) = \{x_j^i | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{v\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{vx_1^i, x_j^i x_{j+1}^i | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2\}$. Jika setiap $x_j^i \in V\big(amal(P_n, v, m)\big)$ dilabeli dengan 1 maka menghasilkan $w\big(x_j^i\big) = l\big(x_{j-1}^i\big) + l\big(x_{j+1}^i\big) = 1 + 1 = 2$ dan $\big(x_{j+1}^i\big) = l\big(x_j^i\big) + l\big(x_{j+2}^i\big) = 1 + 1 = 2$ sehingga titik – titik tersebut memiliki bobot titik yang sama, sedangkan diketahui bahwa pada graf $amal(P_n, v, m)$ titik $x_j^i$ dan $x_{j+1}^i$ adalah titik-titik yang bertetangga sehingga hal tersebut bertentangan dengan Definisi 1, sehingga $opt(l) \geq 2$. Berdasarkan Lemma 1 dan Observasi 3 didapatkan $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) \geq \chi\big(amal(P_n, v, m)\big) = 2$. Selanjutnya dibuktikan bahwa nilai bilangan kromatik 2 tidak berlaku. Asumsikan $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 2$. Jika $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 2$, maka terdapat titik berderajat beda yang memiliki bobot titik yang sama. Andaikan bobot pada titik berderajat satu sama dengan bobot pada titik berderajat 2 dengan kata lain $w\big(x_j^i\big) = w\big(x_{j-2}^i\big)$. Titik yang berderajat 1, untuk titik $x_j^i$ dengan $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1$ dan titik yang berderajat 2, untuk titik $x_{j-2}^i$ dengan $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1$. Kemungkinan bobot titik yang berderajat 1 adalah $1 \leq w\big(x_j^i\big) \leq 2$ sedangkan kemungkinan bobot titik yang berderajat 2 adalah $2 \leq w\big(x_{j-2}^i\big) \leq 4$. Kemungkinan kedua titik tersebut memiliki bobot titik yang sama yaitu ketika bobot titiknya adalah 2 sehingga $w\big(x_j^i\big) = w\big(x_{j-2}^i\big) = 2$. Jika $w\big(x_j^i\big) = 2$, maka $l\big(x_{j-1}^i\big) = 2$ . Selanjutnya, jika $w\big(x_{j-2}^i\big) = 2$, maka:

$$\begin{aligned} w\left(x_{j-2}^i\right) &= 2 \\ l\left(x_{j-1}^i\right) + l\left(x_{j-3}^i\right) &= 2 \\ 2 + l\left(x_{j-3}^i\right) &= 2 \\ l\left(x_{j-3}^i\right) &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan diatas, didapatkan bahwa $l\big(x_{j-3}^i\big) = 0$. Hal ini kontradiksi dengan definisi pelabelan ketakteraturan lokal bahwa $l\big(x_j^i\big) \neq 0$ sehingga $w\big(x_j^i\big) \neq w\big(x_{j-2}^i\big)$. Berdasarkan yang telah dijelaskan diatas, tidak dapat dipenuhi apabila $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 2$, sehingga batas bawah graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan$\big(amal(P_n, v, m)\big)$ adalah $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) \geq 3$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal. Pembuktian batas atas dibagi menjadi 2 subkasus, yaitu saat $n$ genap, $n \equiv 1 \pmod 4$ dan saat $n \equiv 3 \pmod 4$.

Sub kasus 1 yaitu saat $m = 3, n \geq 4,$ $n$ genap, $n \equiv 1 \pmod 4$. Didefinisikan fungsi label $l\left(V\left(amal\left(P_n, v, m\right)\right)\right) \to \{1, 2\}$ sebagai berikut.

$$l\left(x_j^i\right) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = 1,\ j \equiv 1 \pmod 4, 1 \leq i \leq m \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 2,\ j \equiv 1 \pmod 2 \text{ dengan } j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

$$l(v) = 2$$

Berdasarkan fungsi label tersebut didapatkan fungsi bobot titik graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\left(amal\left(P_n, v, m\right)\right)$ sebagai berikut.

$$w(v) = m$$

$$w\left(x_j^i\right) = \begin{cases} 2, & j = n-1, 1 \leq i \leq m \\ 3, & \text{untuk } j \text{ genap dengan } 1 \leq j \leq n-2, 1 \leq i \leq m \\ 4, & \text{untuk } j \text{ ganjil dengan } 1 \leq j \leq n-2, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik diperoleh $\left|w\left(V\left(amal\left(P_n, v, m\right)\right)\right)\right| = 3$ saat $m = 3, n \geq 4,$ $n$ genap, $n \equiv 1 \pmod 4$.

Subkasus 2 yaitu saat $m = 3,$ $n \geq 4,$ $n \equiv 3 \pmod 4$. Didefinisikan fungsi label $l\left(V\left(amal\left(P_n, v, m\right)\right)\right) \to \{1, 2\}$ sebagai berikut.

$$l(v) = 2$$

$$l\left(x_j^i\right) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = 1,\ j \equiv 1 \pmod 4, 1 \leq i \leq m \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 2,\ j \equiv 1 \pmod 2 \text{ dengan } j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

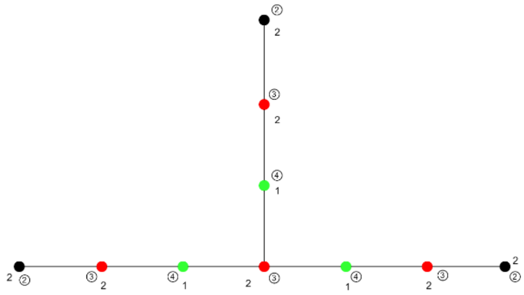
Berdasarkan fungsi label tersebut didapatkan fungsi bobot titik graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\left(amal\left(P_n, v, m\right)\right)$ sebagai berikut.

$$w(v) = m$$

$$w\left(x_j^i\right) = \begin{cases} 1, & j = n-1, 1 \leq i \leq m \\ 3, & \text{untuk } j \text{ genap dengan } 1 \leq j \leq n-2, 1 \leq i \leq m \\ 4, & \text{untuk } j \text{ ganjil dengan } 1 \leq j \leq n-2, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik diperoleh $\left|w\left(V\left(amal(P_n,v,m)\right)\right)\right| = 3$ saat $m=3,\ n\geq 4,\ n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$. Sehingga dari kedua subkasus, didapatkan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf $amal\left(P_n,v,m\right)$ adalah $\chi_{lis}\left(amal\left(P_n,v,m\right)\right)\leq 3$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas, didapatkan $3\leq \chi_{lis}\left(amal\left(P_n,v,m\right)\right)\leq 3$. Jadi bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\left(amal\left(P_n,v,m\right)\right)$ untuk $m=3,\ n\geq 4$ adalah $\chi_{lis}\left(amal\left(P_n,v,m\right)\right)=3.$

Berikut ini contoh gambar pewarnaan titik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\left(amal\left(P_n,v,m\right)\right)$ untuk $m=3,\ n\geq 4$.




*Gambar 2 Pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf* $amal\left(P_4,v,3\right)$

**Teorema 3.** *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan* $amal(P_n,v,m)$ *dengan* $n\geq 6$ *dan* $m=4$ *adalah*

$$\chi_{lis}\left(amal(P_n,v,m)\right)=3$$

**Bukti.** Graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\left(amal(P_n,v,m)\right)$ memiliki himpunan titik $V(G)=\left\{x_j^i|1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n-1\right\}\cup\{v\}$ dan himpunan sisi $E(G)=\left\{vx_1^i, x_j^ix_{j+1}^i|1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n-2\right\}$. Jika setiap $x_j^i\in V\left(amal(P_n,v,m)\right)$ dilabeli dengan 1 maka menghasilkan $w\left(x_j^i\right)=l\left(x_{j-1}^i\right)+l\left(x_{j+1}^i\right)=1+1=2$ dan $\left(x_{j+1}^i\right)=l\left(x_j^i\right)+l\left(x_{j+2}^i\right)=1+1=2$ sehingga titik – titik tersebut memiliki bobot titik yang sama, sedangkan diketahui bahwa pada graf $amal(P_n,v,m)$ titik $x_j^i$ dan $x_{j+1}^i$ adalah titik-titik yang bertetangga sehingga hal tersebut bertentangan dengan Definisi 1, sehingga $opt(l)\geq 2$. Berdasarkan Lemma 1 dan Observasi 3 didapatkan $\chi_{lis}\left(amal(P_n,v,m)\right)\geq \chi\left(amal(P_n,v,m)\right)=2$. Selanjutnya dibuktikan bahwa nilai bilangan kromatik 2 tidak berlaku. Asumsikan $\chi_{lis}\left(amal(P_n,v,m)\right)=2$. Jika $\chi_{lis}\left(amal(P_n,v,m)\right)=2$, maka terdapat titik berderajat beda yang memiliki bobot titik yang sama. Andaikan bobot pada titik berderajat satu sama dengan bobot pada titik berderajat 2 dengan kata lain $w(x_j^i) = w(x_{j-2}^i)$. Titik yang berderajat 1, untuk titik $x_j^i$ dengan $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 1$ dan titik yang berderajat 2, untuk titik $x_{j-2}^i$ dengan $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 1$. Kemungkinan bobot titik yang berderajat 1 adalah $1 \leq w(x_j^i) \leq 2$ sedangkan kemungkinan bobot titik yang berderajat 2 adalah $2 \leq w(x_{j-2}^i) \leq 4$. Kemungkinan kedua titik tersebut memiliki bobot titik yang sama yaitu ketika bobot titiknya adalah 2 sehingga $w(x_j^i) = w(x_{j-2}^i) = 2$. Jika $w(x_j^i) = 2$, maka $l(x_{j-1}^i) = 2$ . Selanjutnya, jika $w(x_{j-2}^i) = 2$, maka:

$$\begin{aligned} w\left(x_{j-2}^i\right) &= 2 \\ l\left(x_{j-1}^i\right) + l\left(x_{j-3}^i\right) &= 2 \\ 2 + l\left(x_{j-3}^i\right) &= 2 \\ l\left(x_{j-3}^i\right) &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan diatas, didapatkan bahwa $l(x_{j-3}^i) = 0$. Hal ini kontradiksi dengan definisi pelabelan ketakteraturan lokal bahwa $l(x_j^i) \neq 0$ sehingga $w(x_j^i) \neq w(x_{j-2}^i)$. Berdasarkan yang telah dijelaskan diatas, tidak dapat dipenuhi apabila $\chi_{lis}(amal(P_n, v, m)) = 2$, sehingga batas bawah graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan$(amal(P_n, v, m))$ adalah $\chi_{lis}(amal(P_n, v, m)) \geq 3$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal. Pembuktian batas atas dibagi menjadi 2 subkasus, yaitu saat $n\ ganjil$ dan saat $n\ genap$.

Subkasus 1 yaitu saat $m = 4, n \geq 6, n\ ganjil$. Didefinisikan fungsi label $l: V(amal(P, v, m)) \to \{1,2\}$ sebagai berikut.

$$l(x_j^i) = \begin{cases} 1, & untuk\ j = 1, j\ genap\ dengan\ 1 \leq j \leq n-2, 1 \leq i \leq m \\ 2, & untuk\ j = n-2, j\ ganjil\ dengan\ 3 \leq j \leq n-1, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$
$$l(v) = 2$$

Berdasarkan fungsi label tersebut didapatkan fungsi bobot titik graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $(amal(P, v, m))$ sebagai berikut.

$$w(v) = m$$
$$w(x_j^i) = \begin{cases} 2, & untuk\ j = n-1, j\ ganjil\ dengan\ 1 \leq j \leq n-3, 1 \leq i \leq m \\ 3, & untuk\ j = 2, j = n-2, 1 \leq i \leq m \\ 4, & untuk\ j\ genap\ dengan\ 4 \leq j \leq n-3, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik diperoleh $\left|w\left(V\left(amal(P, v, m)\right)\right)\right| = 3$.

Subkasus 2 yaitu saat $= 4, n \geq 6, n\ genap$. Didefinisikan fungsi label $l: V\big(amal(P, v, m)\big) \rightarrow \{1,2\}$ sebagai berikut.

$$l(x_j^i) = \begin{cases} 1, & untuk\ \ j\ ganjil\ dengan\ 1 \leq j \leq n-2, 1 \leq i \leq m \\ 2, & untuk\ j = n-1, j\ genap\ dengan\ 1 \leq j \leq n-2, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$
$$l(v) = 1$$

Berdasarkan fungsi label tersebut didapatkan fungsi bobot titik graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\big(amal(P, v, m)\big)$ sebagai berikut.

$$w(v) = m$$
$$w(x_j^i) = \begin{cases} 2, & untuk\ j = n-1, j\ genap\ dengan\ 1 \leq j \leq n-3, 1 \leq i \leq m \\ 3, & untuk\ j = 1, j = n-2, 1 \leq i \leq m \\ 4, & untuk\ j\ ganjil\ dengan\ 3 \leq j \leq n-3, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik diperoleh $\left|w\left(V\big(amal(P_n, v, m)\big)\right)\right| = 3$. Sehingga dari kedua subkasus, didapatkan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf $amal(P_n, v, m)$ adalah $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) \leq 3$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas, didapatkan $3 \leq \chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) \leq 3$. Jadi bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\big(amal(P_n, v, m)\big)$ untuk $n \geq 6$ *dan* $m = 4$ *adalah* $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 3$ ■

**Teorema 4.** *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan* $amal(P_n, v, m)$ *dengan* $n = 4,5$ *dan* $m = 4$ *adalah*

$$\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 4$$

**Bukti.** Graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\big(amal(P_n, v, m)\big)$ memiliki himpunan titik $V(G) = \{x_j^i | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{v\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{vx_1^i, x_j^i x_{j+1}^i | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2\}$. Jika setiap $x_j^i \in V\big(amal(P_n, v, m)\big)$ dilabeli dengan 1 maka menghasilkan $w(x_j^i) = l(x_{j-1}^i) + l(x_{j+1}^i) = 1 + 1 = 2$ dan $(x_{j+1}^i) = l(x_j^i) + l(x_{j+2}^i) = 1 + 1 = 2$ sehingga titik – titik tersebut memiliki bobot titik yang sama, sedangkan diketahui bahwa pada graf $amal(P_n, v, m)$ titik $x_j^i$ dan $x_{j+1}^i$ adalah titik-titik yang bertetangga sehingga hal tersebut bertentangan dengan Definisi 1, sehingga $opt(l) \geq 2$. Berdasarkan Lemma 2.1 dan Observasi 4.1.1 didapatkan $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) \geq \chi\big(amal(P_n, v, m)\big) = 2$. Selanjutnya dibuktikan bahwa nilai bilangan kromatik 2 tidak berlaku. Asumsikan $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 3$. Jika $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 3$, maka terdapat 2 titik yang berderajat beda memiliki bobot titik yang sama. Bobot titik yang berderajat satu sama dengan bobot pada titik berderajat dua. Titik yang berderajat 1, untuk titik $x_j^i$ dengan $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1$ dan titik yang berderajat 2, untuk titik $x_{j-2}^i$ dengan $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1$. Kemungkinan bobot titik yang berderajat 1 adalah $1 \leq w\left(x_j^i\right) \leq 2$ sedangkan kemungkinan bobot titik yang berderajat 2 adalah $2 \leq w\left(x_{j-2}^i\right) \leq 4$. Asumsikan $w\left(x_j^i\right) = w\left(x_{j-2}^i\right)$, maka

$$\begin{aligned} w\left(x_j^i\right) &= w\left(x_{j-2}^i\right) \\ l\left(x_{j-1}^i\right) &= l\left(x_{j-1}^i\right) + l\left(x_{j-3}^i\right) \\ 0 &= l\left(x_{j-3}^i\right) \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan diatas, didapatkan bahwa $l\left(x_{j-3}^i\right) = 0$. Hal ini kontradiksi dengan definisi pelabelan ketakteraturan lokal bahwa $l\left(x_j^i\right) \neq 0$ sehingga $w\left(x_j^i\right) \neq w\left(x_{j-2}^i\right)$. Sehingga batas bawah graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan$\left(amal(P_n, v, m)\right)$ adalah $\chi_{lis}\left(amal(P_n, v, m)\right) \geq 4$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal. Didefinisikan fungsi label $l: V\left(amal(P, v, m)\right) \rightarrow \{1,2\}$ sebagai berikut.

$$l\left(x_j^i\right) = \begin{cases} 1, & untuk\ 1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq m \\ 2, & untuk\ j = 4, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$
$$l(v) = 2$$

Berdasarkan fungsi label tersebut didapatkan fungsi bobot titik graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\left(amal(P, v, m)\right)$ sebagai berikut.

$$w(v) = 4$$
$$w\left(x_j^i\right) = \begin{cases} 1, & untuk\ j = n-1, 1 \leq i \leq m \\ 2, & untuk\ j = 2, 1 \leq i \leq m \\ 3, & untuk\ j = 1, j = 3, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik diperoleh $\left|w\left(V\left(amal(P_n, v, m)\right)\right)\right| = 4$. Sehingga didapatkan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf $amal(P_n, v, m)$ adalah $\chi_{lis}\left(amal(P_n, v, m)\right) \leq 4$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas, didapatkan $4 \leq \chi_{lis}\left(amal(P_n, v, m)\right) \leq 4$. Jadi bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\left(amal(P_n, v, m)\right)$ untuk $n = 4,5 \quad dan \quad m = 4 \ adalah$ $\chi_{lis}\left(amal(P_n, v, m)\right) = 4$ ■

**Teorema 5.** *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan* $amal(P_n, v, m)$ *dengan* $n \geq 4 \ dan \ m \geq 5$ *adalah*

$$\chi_{lis}\left(amal(P_n, v, m)\right) = 4$$

**Bukti.** Graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $(amal(P_n, v, m))$ memiliki himpunan titik $V(G) = \{x_j^i | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{v\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{vx_1^i, x_j^i x_{j+1}^i | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2\}$. Jika setiap $x_j^i \in V(amal(P_n, v, m))$ dilabeli dengan 1 maka menghasilkan $w(x_j^i) = l(x_{j-1}^i) + l(x_{j+1}^i) = 1 + 1 = 2$ dan $(x_{j+1}^i) = l(x_j^i) + l(x_{j+2}^i) = 1 + 1 = 2$ sehingga titik – titik tersebut memiliki bobot titik yang sama, sedangkan diketahui bahwa pada graf $amal(P_n, v, m)$ titik $x_j^i$ dan $x_{j+1}^i$ adalah titik-titik yang bertetangga sehingga hal tersebut bertentangan dengan Definisi 1, sehingga $opt(l) \geq 2$. Berdasarkan Lemma 2.1 dan Observasi 4.1.1 didapatkan $\chi_{lis}(amal(P_n, v, m)) \geq \chi(amal(P_n, v, m)) = 2$. Selanjutnya dibuktikan bahwa nilai bilangan kromatik 2 tidak berlaku. Asumsikan $\chi_{lis}(amal(P_n, v, m)) = 3$. Jika $\chi_{lis}(amal(P_n, v, m)) = 3$, maka terdapat 2 titik yang berderajat beda memiliki bobot titik yang sama. Bobot titik yang berderajat satu sama dengan bobot pada titik berderajat dua. Titik yang berderajat 1, untuk titik $x_j^i$ dengan $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1$ dan titik yang berderajat 2, untuk titik $x_{j-2}^i$ dengan $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1$. Kemungkinan bobot titik yang berderajat 1 adalah $1 \leq w(x_j^i) \leq 2$ sedangkan kemungkinan bobot titik yang berderajat 2 adalah $2 \leq w(x_{j-2}^i) \leq 4$. Asumsikan $w(x_j^i) = w(x_{j-2}^i)$, maka

$$\begin{aligned} w(x_j^i) &= w(x_{j-2}^i) \\ l(x_{j-1}^i) &= l(x_{j-1}^i) + l(x_{j-3}^i) \\ 0 &= l(x_{j-3}^i) \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan diatas, didapatkan bahwa $l(x_{j-3}^i) = 0$. Hal ini kontradiksi dengan definisi pelabelan ketakteraturan lokal bahwa $l(x_j^i) \neq 0$ sehingga $w(x_j^i) \neq w(x_{j-2}^i)$. Sehingga batas bawah graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan$(amal(P_n, v, m))$ adalah $\chi_{lis}(amal(P_n, v, m)) \geq 4$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal. Pembuktian batas atas dibagi menjadi 2 subkasus, yaitu saat $n$ genap, $n \equiv 1(\bmod 4)$ dan saat $n \equiv 3(\bmod 4)$.

Subkasus 1 yaitu saat $m \geq 5$, $n \geq 4$, $n$ genap, $n \equiv 1(\bmod 4)$. Didefinisikan fungsi label $l: V(amal(P, v, m)) \to \{1,2\}$ sebagai berikut.

$$l(v) = 2$$

$$l(x_j^i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = 1, j \equiv 1(\bmod 4), 1 \leq i \leq m \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 0(\bmod 2), j \equiv 1(\bmod 2) \text{ dengan } j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label tersebut didapatkan fungsi bobot titik graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\left(amal(P,v,m)\right)$ sebagai berikut.

$$w(v)=m$$
$$w\left(x_j^i\right)=\begin{cases}2, & j=n-1, 1\le i\le m\\ 3, & \text{untuk } j \text{ genap dengan } 1\le j\le n-2, 1\le i\le m\\ 4, & \text{untuk } j \text{ ganjil dengan } 1\le j\le n-2, 1\le i\le m\end{cases}$$

Berdasarkan fungsi bobot titik, didapatkan $\left|w\left(V\left(amal\left(P_n,v,m\right)\right)\right)\right|=4$ saat $m\ge 5,\ n\ge 4,\ n$ genap, $n\equiv 1(\bmod 4)$.

Subkasus 2 yaitu saat $m\ge 5,\ n\ge 4,\ n\equiv 3(\bmod 4)$. Didefinisikan fungsi label $l: V\left(amal(P,v,m)\right)\to\{1,2\}$ sebagai berikut.

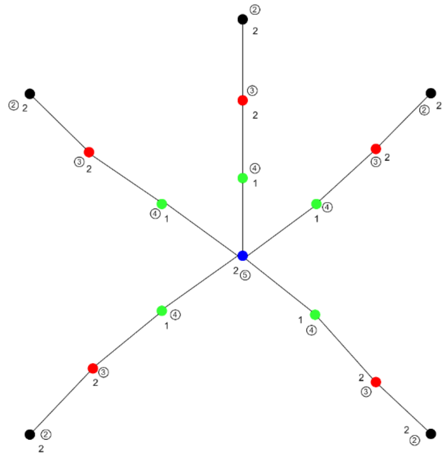
$$l(v)=2$$
$$l\left(x_j^i\right)=\begin{cases}1, & \text{untuk } j=1,\ j\equiv 1(\bmod 4), 1\le i\le m\\ 2, & \text{untuk } j\equiv 0(\bmod 2),\ j\equiv 1(\bmod 2) \text{ dengan } j \text{ ganjil}, 1\le i\le m\end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label tersebut didapatkan fungsi bobot titik graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\left(amal(P,v,m)\right)$ sebagai berikut.

$$w(v)=m$$
$$w\left(x_j^i\right)=\begin{cases}1, & j=n-1, 1\le i\le m\\ 3, & \text{untuk } j \text{ genap dengan } 1\le j\le n-2, 1\le i\le m\\ 4, & \text{untuk } j \text{ ganjil dengan } 1\le j\le n-2, 1\le i\le m\end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik, didpatkan $\left|w\left(V\left(amal(P_n,v,m)\right)\right)\right|=4$. Sehingga dari kedua subkasus, didapatkan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf $amal(P,v,m)$ adalah $\chi_{lis}\left(amal(P_n,v,m)\right)\le 4$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas, didapatkan $4\le\chi_{lis}\left(amal(P_n,v,m)\right)\le 4$.. Jadi bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $\left(amal(P_n,v,m)\right)$ untuk $n\ge 4, m\ge 5$ adalah $\chi_{lis}\left(amal(P_n,v,m)\right)=4$.

Berikut ini merupakan contoh pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf $amal(P_n,v,m)$ dengan $\ge 4, m\ge 5$



*Gambar 3 Pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf* $amal\left(P_4, v, 5\right)$

Berdasarkan Proposisi 1. dan teorema yang diperoleh dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal dari hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan diperoleh bahwa $\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) \geq \chi_{lis}(P_n) + 1$

## 4 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas, didapatkan kesimpulan:

a. Diperoleh 5 teorema baru terkait pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan. Bilangan kromatik yang diperoleh sebagai berikut

**Teorema 1.** *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan* $amal(P_n, v, m)$ *dengan* $n = 3$ *dan* $m \geq 3$ *adalah*

$$\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 3$$

**Teorema 2.** *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan* $amal(P_n, v, m)$ *dengan* $n \geq 4$ *dan* $m = 3$ *adalah*

$$\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 3$$

**Teorema 3.** *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan* $amal(P_n, v, m)$ *dengan* $n \geq 6$ *dan* $m = 4$ *adalah*

$$\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 3$$

**Teorema 4.** *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan* $amal(P_n, v, m)$ *dengan* $n = 4{,}5$ *dan* $m = 4$ *adalah*

$$\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 4$$

**Teorema 5.** *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan* $amal(P_n, v, m)$ *dengan* $n \geq 4$ *dan* $m \geq 5$ *adalah*

$$\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) = 4$$

b. Hubungan antara bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf lintasan dengan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan yaitu

$$\chi_{lis}\big(amal(P_n, v, m)\big) \geq \chi_{lis}(P_n) + 1$$

## 5 Daftar Pustaka


[1] Slamin, 2009, *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*, Jember: Universitas Jember.

[2] Zhang, P., 2016, *A Kaleidoscopic View of Graph Colorings*. Kalamazo: Springer Nature.

[3] Kristiana, A.I., Dafik, Alfarisi, R., Anwar, U.A. & Citra, S.M., 2020, *An inclusive local irregularity coloring of graphs*, Advances in Mathematics: Scientific Journal, **9**(10), 941–946.

[4] Kristiana, A.I., Utoyo, M.I., Dafik, Agustin, I.H., Alfarisi, R. & Waluyo, E., 2019, *On the chromatic number local irregularity of related wheel graph*, Journal of Physics: Conference Series, **1211**(1).

[5] Mursyidah, I. L., Dafik, Adawiyah, R., Kristiana, A. I. & Agustin, I. H., 2021, *On local irregularity vertex coloring of comb product on star graphs*, Journal of Physics: Conference Series, **1836**(1), 1–14.

[6] Citra, S.M., Kristiana, A.I., Adawiyah, R. & Prihandini, R.M., 2021, *On the Packing Chromatic Number of Vertex Amalgamation of Some Related Tree Graph*, Journal of Physics: Conference Series, **1836**(1).

[7] Hartsfield, N. & Ringel, G., 1990, *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*, New York: Academic Press, Inc.

[8] Harsya, A.Y., Agustin, I.K. & Dafik, 2014, *Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Sikel dengan Graf Lintasan*, in Prosiding Seminar Nasional Matematika, **1**(5).