

## Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran *Leptospirosis* dengan *Saturated Incidence Rate*

Nisrina Firsta Ammara<sup>1</sup>, Miswanto<sup>2</sup>, dan Windarto<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga

<sup>2</sup>Corresponding author: miswanto@fst.unair.ac.id

**Abstrak.** Leptospirosis is a disease caused by the bacteria *Leptospira inchtrohorrhagiaea*. Leptospirosis can attack humans and other animals, through rodents, especially rats. This research aims to analyze the stability of the equilibrium point in the mathematical model of the spread of Leptospirosis and apply optimal control variables in the form of prevention and treatment efforts. Based on the results of the mathematical model analysis of the spread of Leptospirosis, two equilibrium points were obtained, there are the non-endemic equilibrium point and the endemic equilibrium point. Local stability and the existence of an equilibrium point depend on the basic reproduction number  $R_0$ . The non-endemic equilibrium point is local asymptotically stable if  $R_0 < 1$ , while the endemic equilibrium point tends to be asymptotically stable if  $R_0 > 1$ . Next, the problem of control variables in the model is determined using Pontryagin's Maximum Principle. Numerical simulation results show that providing control in the form of prevention efforts and treatment efforts simultaneously provides effective results in minimizing the population of individuals exposed to and infected by Leptospirosis at the cost of providing optimal control.

**Keywords:** *Leptospirosis, Model Matematika, Analisis Kestabilan, Kontrol Optimal.*

### 1 Pendahuluan

Leptospirosis merupakan penyakit zoonosis yang disebabkan oleh bakteri *Leptospira inchtrohorrhagiaea* yang dapat menyerang manusia dan hewan lain, dengan perantara yaitu hewan pengerat terutama pada tikus [1]. Bakteri *Leptospira* berpotensi menginfeksi manusia yang memiliki perilaku kesehatan yang buruk melalui kulit yang terluka dan mukosa pada tubuhnya. Gejala pada penyakit *Leptospirosis* ini beragam yaitu demam, menggigil, sakit kepala, nyeri otot, dan batuk, yang sangat mirip dengan demam dengue, malaria, dan scrub thypus, sehingga membuat tenaga medis kurang tepat dalam pemberian pengobatan pada penderita. *Leptospirosis* juga dapat menimbulkan kerusakan beberapa organ seperti kegagalan hati, kegagalan ginjal, pendarahan pada paru-paru dan meningoencephalitis yang berakhir pada kematian [8].

Menurut [5], pada tahun 2010 terdapat 410 kasus Leptospirosis di 8 (delapan) provinsi di Indonesia dengan 46 kasus kematian. Tahun 2011 menjadi tahun dengan kasus *Leptospirosis* terbanyak di Indonesia sebanyak 857 kasus dengan 82 kasus kematian. Kemudian pada tahun 2014 terdapat 411 kasus *Leptospirosis* dengan kasus kematian sebanyak 56 kasus karena terjadi bencana berupa banjir pada daerah DKI Jakarta dan Jawa Tengah.

Manusia berpotensi terinfeksi oleh *Leptospirosis* karena berinteraksi dengan hewan yang terinfeksi baik secara langsung maupun tidak langsung. Penularan secara langsung yang terjadi melalui kontak langsung dengan hewan yang terinfeksi oleh bakteri *Leptospira icterohemorrhagiae*. Sedangkan penularan tidak langsung terjadi melalui makanan, minuman, dan genangan air yang terkontaminasi oleh urin hewan yang terinfeksi *Leptospirosis*. Penularan pada manusia dengan manusia dapat terjadi melalui plasenta ibu ke janin, air susu ibu dan hubungan seksual [3]. Menurut [5] pengobatan pada penderita penyakit *Leptospirosis* yaitu dengan pemberian antibiotik yang sesuai dilakukan sejak kasus suspek ditegakkan secara klinis dengan menggunakan Doksisisiklin 2x100mg selama 7 (tujuh) hari.

Upaya pencegahan dalam mengurangi risiko terjadinya penyebaran penyakit *Leptospirosis* melalui jalur penularan dapat dilakukan dengan membersihkan tempat yang menjadi habitat tikus dan mengurangi kontak dengan sumber infeksi air yang tercemar *Leptospira*, hewan yang terinfeksi atau hewan karier [7].

Penelitian mengenai penyebaran *Leptospirosis* telah dikembangkan oleh beberapa peneliti, diantaranya yakni [6] mengembangkan model matematika penyebaran *Leptospirosis* dengan pengendalian optimal menggunakan model SIR (Susceptible – Infected – Recovered) dengan Saturated Incidence Rate. Selanjutnya terdapat penelitian yang dilakukan oleh [2], dalam artikelnya yang berjudul Modelling *Leptospirosis* in livestock, penulis menggunakan model SI (Susceptible – Infected). Dengan menambah waktu mengembala hewan ternak di padang rumput dapat menurunkan laju infeksi *Leptospirosis* pada hewan ternak. Serta berpotensi mengurangi biaya pengobatan, kehilangan produktivitas kerja, dan meningkatkan hasil bagi petani maupun pengembala.

Berdasarkan uraian diatas, penulis tertarik untuk menganalisis kestabilan titik setimbang dalam dinamika penyebaran *Leptospirosis*. Mengacu pada model matematika yang ditulis oleh [4]. Model yang dirumuskan menggunakan modifikasi tipe SIR dengan *bilinier incidence rate*. Penulis tertarik untuk memodifikasi dari bentuk bilinear incidence rate menjadi saturated incidence rate serta menambahkan kompartemen berupa populasi individu yang terpapar. Karena penyebaran *Leptospirosis* pasti akan memiliki batas maksimal atau mencapai titik jenuhnya di suatu waktu, sehingga bentuk saturated incidence rate dianggap lebih tepat untuk model tersebut dan diberikan penambahan kontrol berupa pencegahan dan pengobatan.

## 2 Model Matematika

Pada bagian ini disajikan hasil konstruksi model matematika penyebaran *Leptospirosis* yang ditulis oleh [4]. Pada model ini populasi akan dibagi menjadi enam kompartemen yaitu populasi populasi rodent yang rentan terinfeksi *Leptospirosis* ( $S_r$ ), populasi rodent yang terinfeksi dan dapat menularkan *Leptospirosis* ( $I_r$ ), populasi manusia rentan terinfeksi *Leptospirosis* ( $S_h$ ), populasi manusia terpapar *Leptospirosis* ( $E_h$ ), populasi manusia yang terinfeksi dan dapat menularkan *Leptospirosis* ( $I_h$ ), dan populasi manusia

yang sembuh dari *Leptospirosis* ( $R_h$ ). Berikut ini notasi dan deskripsi dari setiap variabel dan parameter yang digunakan pada model penyebaran *Leptospirosis*:

**Tabel 1** Notasi dan Deskripsi Variabel Model Matematika Penyebaran *Leptospirosis*

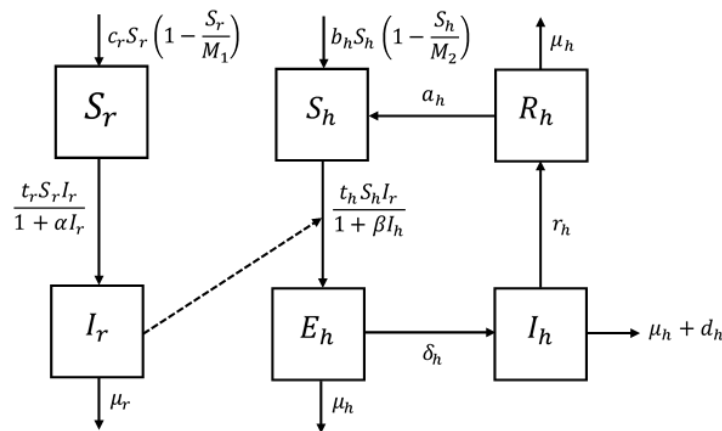
Variabel	Deskripsi
$S_r(t)$	Populasi hewan pengerat rentan terinfeksi <i>Leptospirosis</i> pada saat $t$
$I_r(t)$	Populasi hewan pengerat terinfeksi <i>Leptospirosis</i> pada saat $t$
$S_h(t)$	Populasi manusia rentan terinfeksi <i>Leptospirosis</i> pada saat $t$
$E_h(t)$	Populasi manusia terpapar <i>Leptospirosis</i> pada saat $t$
$I_h(t)$	Populasi Manusia terinfeksi <i>Leptospirosis</i> pada saat $t$
$R_h(t)$	Populasi manusia sembuh dari <i>Leptospirosis</i> pada saat $t$

**Tabel 2** Notasi dan Deskripsi Parameter Model Matematika Penyebaran *Leptospirosis*

Parameter	Deskripsi	Satuan
$t_h$	Laju penyebaran <i>Leptospirosis</i> pada manusia	$(Individu \times Hari)^{-1}$
$t_r$	Laju penyebaran <i>Leptospirosis</i> pada hewan pengerat	$(Ekor \times Hari)^{-1}$
$\delta_h$	Laju transmisi manusia terpapar <i>Leptospirosis</i>	$Hari^{-1}$
$d_h$	Laju kematian manusia karena terinfeksi <i>Leptospirosis</i>	$Hari^{-1}$
$\mu_h$	Laju kematian alami manusia	$Hari^{-1}$
$b_h$	Laju kelahiran alami manusia	$Hari^{-1}$
$\mu_r$	Laju kematian alami hewan pengerat	$Hari^{-1}$
$c_r$	Laju kelahiran alami hewan pengerat	$Hari^{-1}$
$r_h$	Laju kesembuhan manusia	$Hari^{-1}$
$a_h$	Tingkat menurunnya imunitas manusia	$Hari^{-1}$
$M_1$	Kapasitas pendukung dari populasi hewan pengerat rentan terinfeksi <i>Leptospirosis</i>	<i>Ekor</i>
$M_2$	Kapasitas pendukung dari populasi manusia rentan terinfeksi <i>Leptospirosis</i>	<i>Individu</i>

Parameter	Deskripsi	Satuan
$\alpha$	Tingkat kejenuhan populasi hewan pengerat (tikus) terinfeksi	$Ekor^{-1}$
$\beta$	Tingkat kejenuhan populasi manusia terinfeksi	$Individu^{-1}$

Berdasarkan asumsi, pendefinisian variabel, dan parameter yang tertera, maka dapat dikonstruksikan diagram transmisi dari model matematika penyebaran *Leptospirosis* seperti berikut:



**Gambar 1** Diagram transmisi model matematika penyebaran *Leptospirosis*

Berdasarkan diagram transmisi pada Gambar 1, maka dapat dibentuk sebuah model matematika berupa sistem persamaan diferensial biasa tak linier sebagai berikut:

$$\frac{dS_r}{dt} = c_r S_r \left(1 - \frac{S_r}{M_1}\right) - \frac{t_r S_r I_r}{1 + \alpha I_r} \quad (1)$$

$$\frac{dI_r}{dt} = \frac{t_r S_r I_r}{1 + \alpha I_r} - \mu_r I_r \quad (2)$$

$$\frac{dS_h}{dt} = b_h S_h \left(1 - \frac{S_h}{M_2}\right) - \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} + a_h R_h \quad (3)$$

$$\frac{dE_h}{dt} = \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} - \mu_h E_h - \delta_h E_h \quad (4)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \delta_h E_h - \mu_h I_h - d_h I_h - r_h I_h \quad (5)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = r_h I_h - a_h R_h - \mu_h R_h \quad (6)$$

Dengan  $S_r, I_r, S_h, E_h, I_h, R_h \geq 0, t_h, t_r, \delta_h, d_h, \mu_h, b_h, \mu_r, c_r, r_h, a_h, \beta, M_1, M_2 > 0$

### 3 Titik Setimbang Model

Keadaan setimbang adalah suatu kondisi ketika perubahan jumlah populasi tertentu sepanjang waktu adalah nol. Model matematika penyebaran *Leptospirosis* akan memiliki titik setimbang jika memenuhi  $\frac{dS_r}{dt} = \frac{dI_r}{dt} = \frac{dS_h}{dt} = \frac{dE_h}{dt} = \frac{dI_h}{dt} = \frac{dR_h}{dt} = 0$ . Berdasarkan persamaan (1) – (6) diperoleh dua titik setimbang yakni titik setimbang non endemik dan titik setimbang endemik.

Titik setimbang non endemik adalah suatu kondisi ketika tidak terjadi penyebaran *Leptospirosis* dalam populasi. Keadaan ini terjadi ketika populasi individu yang terinfeksi bernilai nol ( $I_r = I_h = 0$ ). Misalkan titik setimbang non endemik dinyatakan dalam  $E_0 = (S_r, I_r, S_h, E_h, I_h, R_h)$ , maka dengan mensubstitusikan nilai  $I_r = I_h = 0$  ke dalam persamaan (1) – (6) sehingga diperoleh titik setimbang non endemik dari model matematika penyebaran *Leptospirosis*  $E_0 = (M_1, 0, M_2, 0, 0, 0)$ .

Selanjutnya akan ditentukan nilai dari bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) yang akan digunakan sebagai parameter ambang batas untuk menentukan apakah dalam populasi tersebut terjadi penyebaran atau tidak. Dalam menentukan bilangan reproduksi dasar menggunakan titik setimbang non endemik. Metode yang digunakan adalah metode NGM (Next Generation Matrix). Melalui beberapa langkah perhitungan, didapatkan  $R_0 = \frac{t_r M_1}{\mu_r}$ .

Titik setimbang selanjutnya dari model penyebaran *Leptospirosis* adalah titik setimbang endemik. Misalkan titik setimbang endemik dinyatakan sebagai  $E_1 = (S_r^*, I_r^*, S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*)$ . Berdasarkan persamaan (1) – (6), diperoleh titik setimbang endemik dari model matematika penyebaran *Leptospirosis* adalah sebagai berikut:  $S_r^* = \frac{M_1}{c_r} \left( c_r - \frac{t_r I_r}{1 + \alpha I_r} \right)$ ,  $S_h^* = \frac{E_h (\mu_h + \delta_h) \left( 1 + \frac{\beta \delta_h E_h}{(\mu_h + d_h + r_h)} \right)}{t_h I_r}$ ,  $E_h^* = \frac{t_h S_h I_r}{(1 + \beta I_h) (\mu_h + \delta_h)}$ ,  $I_h^* = \frac{\delta_h E_h}{(\mu_h + d_h + r_h)}$ ,  $R_h^* = \frac{r_h I_h^*}{(a_h + \mu_h)}$ .

Sedangkan  $I_r^*$  merupakan akar dari polynomial berderajat dua sebagai berikut:

$$I_r^{*2} A + I_r^* B + C = 0 \quad (7)$$

Dengan  $A = a^2 c_r \mu_r$ ,  $B = 2 c_r \mu_r a - t_r M_1 a + t_r^2 M_1$ ,  $C = \mu_r c_r - t_r M_1 c_r$ .

Pada saat  $B = 0$ , karena semua parameter bernilai positif maka  $A < 0$ , sehingga kondisi yang harus dipenuhi agar  $I_r^*$  eksis yaitu  $C > 0$ . Akibatnya

$$\Leftrightarrow \mu_r c_r - t_r M_1 c_r > 0$$

$$\Leftrightarrow \mu_r c_r < t_r M_1 c_r$$

$$\Leftrightarrow \mu_r < t_r M_1$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{t_r M_1}{\mu_r}$$

$$\Leftrightarrow 1 < R_0 \Leftrightarrow R_0 > 1$$

Karena populasi harus bernilai positif sebagai tanda keberadaan populasi, maka titik setimbang endemik eksis ketika  $R_0 > 1$ .

#### 4 Analisis Kestabilan Titik Setimbang

Pada penjelasan sebelumnya, diperoleh titik setimbang non endemik ( $E_0$ ) dan titik setimbang endemik ( $E_1$ ) dari model penyebaran *Leptospirosis*. Langkah selanjutnya yaitu menganalisis kestabilan lokal sehingga diperoleh syarat kestabilan lokal dari masing-masing titik setimbang. Karena model penyebaran *Leptospirosis* berupa persamaan diferensial non linier, maka untuk mendapatkan kestabilan lokal dari masing-masing titik setimbang perlu dilakukan linierisasi model dengan menggunakan matriks Jacobian. diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} (c_r - \frac{2c_r S_r}{M_1}) - \frac{t_r I_r}{1 + \alpha I_r} & -\frac{t_r S_r}{(1 + \alpha I_r)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_r I_r}{1 + \alpha I_r} & \frac{t_r S_r}{(1 + \alpha I_r)^2} - \mu_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t_h S_h}{1 + \beta I_h} & (b_h - \frac{2b_h S_h}{M_2}) - \frac{t_h I_r}{1 + \beta I_h} & 0 & -\frac{t_h \beta S_h I_r}{(1 + \beta I_h)^2} & a_h \\ 0 & \frac{t_h S_h}{1 + \beta I_h} & \frac{t_h I_r}{1 + \beta I_h} & -\mu_h - \delta_h & \frac{t_h \beta S_h I_r}{(1 + \beta I_h)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_h & -\mu_h - d_h - r_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_h & -a_h - \mu_h \end{pmatrix}$$

##### 4.1 Kestabilan Titik Setimbang Non Endemik

Kestabilan pada titik setimbang non endemik diperoleh dengan cara mensubstitusikan nilai titik setimbang non endemik yang didapatkan sebelumnya, yakni  $E_0 = (S_r, I_r, S_h, E_h, I_h, R_h) = (M_1, 0, M_2, 0, 0, 0)$  ke dalam matriks Jacobian sehingga diperoleh:

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -c_r & -t_r M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (t_r M_1 - \mu_r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t_h M_2 & -b_h & 0 & 0 & a_h \\ 0 & t_h M_2 & 0 & (-\mu_h - \delta_h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_h & -\mu_h - d_h - r_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_h & -a_h - \mu_h \end{pmatrix}$$

Kemudian dengan menghitung  $\det(\lambda I - J_{E_0}) = 0$ , sehingga diperoleh:

$$(\lambda + c_r)(\lambda + b_h)(\lambda + k_1)(\lambda + k_2)(\lambda + k_3)(\lambda + k_4) = 0 \quad (8)$$

dengan:  $k_1 = \mu_r - t_r M_1$ ,  $k_2 = \mu_r + \delta_h$ ,  $k_3 = \mu_h + d_h + r_h$ ,  $k_4 = a_h + \mu_h$ .

Secara eksplisit didapatkan empat nilai eigen yaitu, eigen  $\lambda_1 = -c_r$ ,  $\lambda_2 = -b_h$ ,  $\lambda_3 = -(\delta_h + \mu_h)$ ,  $\lambda_4 = -(\mu_h + d_h + r_h)$ ,  $\lambda_5 = -(a_h + \mu_h)$ , dan  $\lambda_6 = t_r M_1 - \mu_r$ . Jelas bahwa  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  dan  $\lambda_5$  bernilai negatif karena parameter  $c_r, b_h, \delta_h, \mu_h, d_h, r_h$  dan  $a_h$  bernilai positif, sedangkan untuk  $\lambda_6$  diperoleh  $\lambda_6 = t_r M_1 - \mu_r$ . Agar titik setimbang non endemik stabil asimtotis maka  $\lambda_6 < 0$ , sehingga diperoleh syarat  $\lambda_6 < 0$ .

$$\lambda_6 = t_r M_1 - \mu_r < 0.$$

$$\Leftrightarrow t_r M_1 < \mu_r$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_r M_1}{\mu_r} < 1$$

$$\Leftrightarrow R_0 < 1$$

Berdasarkan uraian di atas, titik setimbang non endemik  $E_0$  akan stabil asimtotis jika memenuhi syarat  $R_0 < 1$ . Hal ini menunjukkan bahwa jika  $R_0 < 1$ , maka setiap individu yang terinfeksi dapat menularkan *Leptospirosis* kepada rata-rata kurang dari satu penderita baru atau dengan kata lain tidak ada penyebaran *Leptospirosis*.

## 4.2 Kestabilan Titik Setimbang Endemik

Penentuan kestabilan pada titik setimbang endemik diperoleh dengan cara mensubstitusikan nilai titik setimbang  $E_1 = (S_r^*, I_r^*, S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*)$ , ke dalam matriks Jacobian (J), bentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan  $\det(\lambda I - JE_1) = 0$ , sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$(\lambda^2 + A\lambda + B)(\lambda^4 + \lambda^3 C + \lambda^2 D + \lambda E + F) = 0 \quad (9)$$

dengan:  $A = -k_4 - k_1$ ,  $B = k_1 k_4 - k_2 k_3$ ,  $C = -k_{10} - k_{11} - k_6 - k_{14}$ ,  $D = k_{12} k_{14} + k_{10} k_{14} +$

$k_{10} k_{12} - k_7 k_{11} + k_6 k_{14} + k_6 k_{12} + k_6 k_{10}$ ,  $E = k_7 k_{11} - k_{10} k_{12} k_{14} - k_6 k_{12} k_{14} - k_6 k_{10} k_{14} -$

$k_6 k_{10} k_{12} + k_6 k_9 k_{11}$ ,  $F = k_6 k_{10} k_{12} k_{14} - k_9 k_{11} k_7 k_{12} - k_6 k_{14} k_7 k_{11} + k_9 k_{11} k_8 k_{14}$

Selanjutnya akan ditentukan akar-akar dari persamaan karakteristik (9), penyelesaian solusinya sulit dilakukan secara analitik karena berupa persamaan karakteristik berderajat empat sehingga titik setimbang endemik ini akan dianalisis melalui simulasi numerik dengan menggunakan bidang fase dengan bantuan *software* MATLAB. Simulasi numerik dilakukan dengan memberikan nilai parameter dan tiga nilai awal yang berbeda pada masing-masing kompartemen. Adapun nilai parameter yang digunakan disajikan pada **Tabel 3**.

**Tabel 3** Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran *Leptospirosis*

Parameter	Nilai Parameter	Sumber
$t_h$	0.02	Asumsi
$t_r$	0.0001	Asumsi
$c_r$	0.003	Asumsi
$\mu_h$	0.00003913	Asumsi

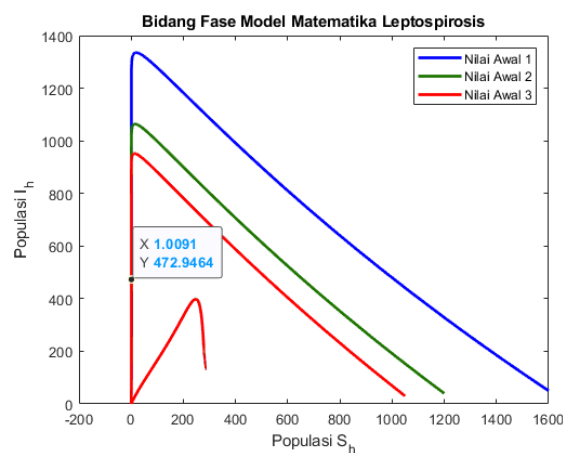
$\mu_r$	0.001815	[4]
$d_h$	0.01	Asumsi
$b_h$	0.5	Asumsi
$r_h$	0.00005	Asumsi
$a_h$	0.013	Asumsi
$\delta_h$	0.05	Asumsi
$\alpha$	0.05	Asumsi
$\beta$	0.0083	Asumsi
$M_1$	30	Asumsi
$M_2$	300	Asumsi

Berikut ini diberikan tiga nilai awal yang berbeda untuk masing-masing populasi pada model matematika penyebaran *Leptospirosis*. Hal ini bertujuan untuk mengetahui kekonvergenan solusi dari masing-masing nilai awal dan parameter yang digunakan. Simulasi dilakukan pada saat  $t = 0$  sampai  $t = 300$ . Adapun nilai awal yang digunakan disajikan pada Tabel 4.

**Tabel 4** Nilai Awal Tiap Kompartemen untuk Simulasi Numerik

Nilai Awal	$S_r(0)$	$I_r(0)$	$S_h(0)$	$E_h(0)$	$I_h(0)$	$R_h(0)$	Warna
Nilai Awal 1	2500	550	1600	50	195	120	Biru
Nilai Awal 2	2400	545	1200	40	193	118	Hijau
Nilai Awal 3	2300	540	1050	30	180	116	Merah

Berikut ini adalah gambar dari bidang fase model matematika penyebaran *Leptospirosis*



**Gambar 2** Grafik Bidang Fase Model Matematika Penyebaran *Leptospirosis*



**Gambar 2** menunjukkan simulasi bidang fase untuk populasi manusia rentan dan populasi manusia terinfeksi pada model penyebaran *Leptospirosis*. Berdasarkan tiga nilai awal berbeda yang telah diberikan, terlihat bahwa grafik kedua populasi cenderung konvergen ke satu titik  $(S_h, I_h) = (1.0091; 472.9464)$ . Hal ini berarti secara keseluruhan dinamika dari setiap populasi pada model matematika penyebaran *Leptospirosis* bergerak mendekati titik setimbang endemik  $E_1$ . Nilai  $E_1$  diperoleh dengan mensubstitusikan nilai parameter pada **Tabel 3** ke titik setimbang endemik  $E_1$  yang telah diperoleh secara analitik. Berdasarkan nilai parameter yang diberikan pada **Tabel 3**, didapatkan nilai  $R_0 = 1.6207 > 1$ .

Berdasarkan hasil simulasi pada **Gambar 2** diperoleh kesimpulan bahwa titik setimbang endemik pada model matematika penyebaran *Leptospirosis* akan cenderung stabil asimtotis jika  $R_0 > 1$ . Hal ini menunjukkan bahwa jika  $R_0 > 1$ , maka individu yang terinfeksi *Leptospirosis* dapat menularkan kepada rata-rata lebih dari satu individu lainnya atau dengan kata lain terjadi penyebaran *Leptospirosis*.

### 4.3 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas parameter dilakukan untuk mengetahui parameter yang paling berpengaruh terhadap nilai  $R_0$ . Adapun indeks parameter dirumuskan sebagai  $ind m = \left(\frac{\partial R_0}{\partial m}\right) \frac{m}{R_0}$ , dengan  $m$  merupakan parameter yang akan dianalisis. Hasil perhitungan disajikan pada **Tabel 5**.

**Tabel 5** Hasil Perhitungan Indeks Sensitivitas Parameter

Parameter	Indeks Sensitivitas
$t_r$	1
$M_1$	1
$\mu_r$	-1

**Tabel 6** Hubungan antara Perubahan Nilai Parameter terhadap Nilai dari  $R_0$

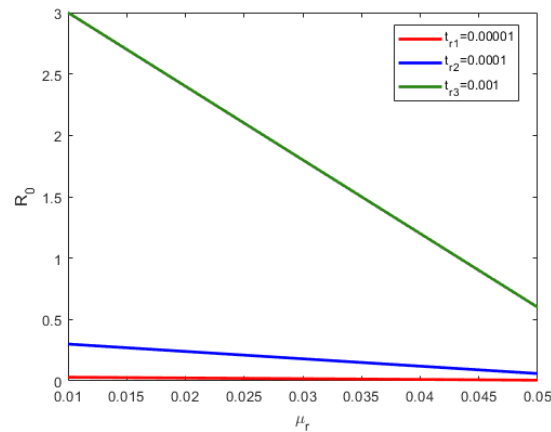
Parameter ( $p$ )	Indeks Sensitivitas	$R_0 = 1.6207$			
		$p - 10\%$	$p - 15\%$	$p + 10\%$	$p + 15\%$
$t_r$	1	0.16197	0.243005	0.16217	0.243205
$M_1$	1	29.83793	29.756895	30.16207	30.243105
$\mu_r$	-1	0.163921	0.244956	0.160219	0.241254

Berdasarkan **Tabel 6** terlihat bahwa untuk indeks sensitivitas yang bernilai positif menunjukkan bahwa jika nilai parameter bertambah, maka nilai  $R_0$  akan bertambah. Sebaliknya, apabila indeks sensitivitas bernilai negatif menunjukkan bahwa jika nilai parameter bertambah, maka nilai  $R_0$  akan berkurang. Sebagai contoh, diperoleh indeks sensitivitas parameter  $t_r$  adalah 1, artinya jika laju penyebaran *Leptospirosis* pada hewan pengerat ( $t_r$ ) bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka mengakibatkan  $R_0$  bertambah (berkurang) sebesar 10%. Demikian pula dengan parameter  $\mu_r$  dengan indeks sensitivitas

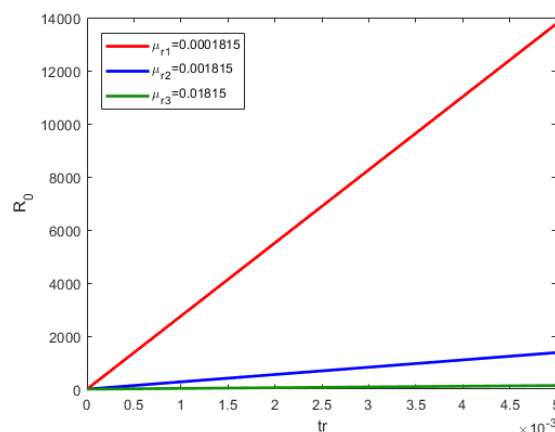
sebesar -1, artinya jika laju kematian alami hewan pengerat ( $\mu_r$ ) bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka mengakibatkan  $R_0$  berkurang (bertambah) sebesar 10%.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi parameter, simulasi pertama dipilih nilai  $t_r = 0.00001$ ,  $t_r = 0.0001$ , dan  $t_r = 0.001$  dengan  $\mu_r$  berada pada interval  $0.01 \leq \mu_r \leq 0.05$ . Pada simulasi kedua, dipilih nilai  $\mu_r = 0.0001815$ ,  $\mu_r = 0.001815$ , dan  $\mu_r = 0.01815$  dengan  $t_r$  berada pada interval  $0 \leq t_r \leq 0.005$ . Hasil simulasi berupa grafik sensitivitas  $t_r$  dan  $\mu_r$  terhadap  $R_0$  dapat dilihat pada **Gambar 3** dan **Gambar 4**.

Berdasarkan **Gambar 3** dapat dilihat bahwa ketika dipilih tiga nilai  $t_r$  yang berbeda yaitu  $t_r = 0.00001$ ,  $t_r = 0.0001$ , dan  $t_r = 0.001$  pada interval  $0 \leq t_r \leq 0.005$ , jika nilai parameter  $\mu_r$  meningkat, maka nilai  $R_0$  akan menurun untuk seluruh nilai  $t_r$ . Berdasarkan **Gambar 4** dapat dilihat bahwa ketika dipilih tiga nilai  $\mu_r$  yang berbeda yaitu  $\mu_r = 0.0001815$ ,  $\mu_r = 0.001815$ , dan  $\mu_r = 0.01815$  pada interval  $0.01 \leq \mu_r \leq 0.05$ , jika nilai parameter  $t_r$  meningkat, maka nilai  $R_0$  akan meningkat untuk seluruh nilai  $\mu_r$ .



**Gambar 3** Sensitivitas  $\mu_r$  terhadap  $R_0$  dengan tiga nilai  $t_r$  yang berbeda



**Gambar 4** Sensitivitas  $t_r$  terhadap  $R_0$  dengan tiga nilai  $\mu_r$  yang berbeda

## 5 Masalah Kontrol Optimal

Berikut diberikan beberapa notasi dan pengertian dari masing-masing variabel beserta parameter yang digunakan dalam mengonstruksikan model kontrol optimal.

**Tabel 7** Notasi dan Deskripsi beserta Parameter dengan Adanya Variabel Kontrol

Notasi	Keterangan
$u_1(t)$	Variabel input kontrol berupa sanitasi lingkungan pada saat $t$
$u_2(t)$	Variabel input kontrol berupa pengobatan pada saat $t$
$t_0$	Waktu awal pengamatan ketika dilakukan kontrol
$t_f$	Waktu akhir pengamatan ketika dilakukan kontrol
$A$	Konstanta pembobot berupa biaya untuk upaya sanitasi lingkungan
$B$	Konstanta pembobot berupa biaya untuk upaya pengobatan

Adapun model matematika penyebaran *Leptospirosis* yang dikonstruksikan dengan penambahan kontrol optimal adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS_r}{dt} = c_r S_r \left(1 - \frac{S_r}{M_1}\right) - \frac{t_r S_r I_r}{1 + \alpha I_r} \quad (10)$$

$$\frac{dI_r}{dt} = \frac{t_r S_r I_r}{1 + \alpha I_r} - \mu_r I_r \quad (11)$$

$$\frac{dS_h}{dt} = b_h S_h \left(1 - \frac{S_h}{M_2}\right) - (1 - u_1) \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} + a_h R_h \quad (12)$$

$$\frac{dE_h}{dt} = (1 - u_1) \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} - \mu_h E_h - \delta_h E_h \quad (13)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \delta_h E_h - \mu_h I_h - d_h I_h - r_h I_h - u_2 I_h \quad (14)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = r_h I_h - a_h R_h - \mu_h R_h + u_2 I_h \quad (15)$$

Penjelasan mengenai variabel dan parameter yang terdapat pada persamaan (10) – (15) mengacu pada **Tabel 1**, **Tabel 2** serta penjelasan terkait variabel kontrol mengacu pada **Tabel 7**. Selanjutnya, fungsi ongkos atau indeks performansi dari model matematika penyebaran *Leptospirosis* disertai kontrol optimal diformulasikan sebagai berikut:

$$\min J(u_1) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ E_h + I_h + \frac{1}{2} A u_1^2 + \frac{1}{2} B u_2^2 \right] dt$$

dengan  $0 \leq u(t) \leq 1$  dan  $t_0 \leq t \leq t_f$ , serta untuk koefisien biaya  $A, B > 0$ .

Fungsi ongkos ini bertujuan untuk meminimumkan jumlah populasi manusia yang terpapar *Leptospirosis* ( $E_h$ ) dan populasi manusia yang terinfeksi *Leptospirosis* ( $I_h$ ). Input kontrol  $u_1$  dan  $u_2$  memiliki kisaran nilai  $0 \leq u(t) \leq 1$  menunjukkan bahwa strategi kontrol model matematika *Leptospirosis* memiliki peluang sukses antara 0 sampai 1.

Batas waktu kontrol optimal berada pada interval  $t_0 \leq t \leq t_f$  yang menyatakan waktu pengamatan yaitu waktu awal pemberian kontrol hingga waktu akhir pemberian kontrol.

### 5.1 Penyelesaian Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran *Leptospirosis*

Berdasarkan Prinsip Maksimum Pontryagin langkah pertama yang dilakukan adalah membentuk fungsi Hamiltonian berikut:

$$\mathcal{H} = E + I + \frac{1}{2}Au_1^2 + \frac{1}{2}Bu_2^2 + \gamma^T(t)f(x(t), u(t), t) \quad (16)$$

dengan  $f(x(t), u(t), t)$  adalah ruas kanan dari model yang disertai penambahan variabel kontrol. Sedangkan  $\gamma(t)$  menyatakan pengali *Lagrange* atau variabel *co-state* dengan  $\gamma^T(t)$  adalah transpose dari  $\gamma(t)$ . Fungsi Hamiltonian tersebut dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\mathcal{H} = E_h + I_h + \frac{1}{2}Au_1^2 + \frac{1}{2}Bu_2^2 (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4 \quad \gamma_5 \quad \gamma_6) \begin{pmatrix} c_r S_r (1 - \frac{S_r}{M_1}) - \frac{t_r S_r I_r}{1 + \alpha I_r} \\ \frac{t_r S_r I_r}{1 + \alpha I_r} - \mu_r I_r \\ b_h S_h (1 - \frac{S_h}{M_2}) - (1 - u_1) \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} + a_h R_h \\ (1 - u_1) \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} - \mu_h E_h - \delta_h E_h \\ \delta_h E_h - \mu_h I_h - d_h I_h - r_h I_h - u_2 I_h \\ r_h I_h - a_h R_h - \mu_h R_h + u_2 I_h \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{H} = E_h + I_h + \frac{1}{2}Au_1^2 + \frac{1}{2}Bu_2^2 + \gamma_1 \left[ c_r S_r \left( 1 - \frac{S_r}{M_1} \right) - \frac{t_r S_r I_r}{1 + \alpha I_r} \right] + \gamma_2 \left[ \frac{t_r S_r I_r}{1 + \alpha I_r} - \mu_r I_r \right]$$

$$+ \gamma_3 \left[ b_h S_h \left( 1 - \frac{S_h}{M_2} \right) - (1 - u_1) \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} + a_h R_h \right]$$

$$+ \gamma_4 \left[ (1 - u_1) \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} - \mu_h E_h - \delta_h E_h \right] + \gamma_5 [\delta_h E_h - \mu_h I_h - d_h I_h - r_h I_h - u_2 I_h]$$

$$+ \gamma_6 [r_h I_h - a_h R_h - \mu_h R_h + u_2 I_h]$$

Selanjutnya untuk menentukan kondisi  $H$  yang optimal melalui kondisi stasioner  $H$  yang dipenuhi dengan meminimalkan  $H$  terhadap vektor kontrol  $u_1(t)$  dan  $u_2(t)$  sebagai berikut:  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = 0$ .

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow Au_1 + \gamma_3 \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} - \gamma_4 \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} = 0$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} \left( \frac{\gamma_4 - \gamma_3}{A} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow Bu_2 + \gamma_5 (-I_h) + \gamma_6 (I_h) = 0$$

$$\Leftrightarrow u_2 = \frac{I_h}{B}(\gamma_5 - \gamma_6)$$

Karena batas nilai  $u_1(t)$  adalah  $0 \leq u(t) \leq 1$ , maka nilai untuk  $u_1$  dan  $u_2$  dapat dinyatakan dalam beberapa kemungkinan sebagai berikut.

$$u_1 = \begin{cases} 0 & \text{untuk } u_1 \leq 0 \\ \frac{t_h S_h I_r (\gamma_4 - \gamma_3)}{1 + \beta I_h} \frac{1}{A} & \text{untuk } 0 < u_1 < 1 \\ 1 & \text{untuk } u_1 \geq 1 \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} 0 & \text{untuk } u_2 \leq 0 \\ \frac{I_h}{B}(\gamma_5 - \gamma_6) & \text{untuk } 0 < u_2 < 1 \\ 1 & \text{untuk } u_2 \geq 1 \end{cases}$$

Berdasarkan kemungkinan-kemungkinan tersebut, maka diperoleh nilai kontrol yang optimal adalah sebagai berikut:

$$u_1^* = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{t_h S_h I_r (\gamma_4 - \gamma_3)}{1 + \beta I_h} \frac{1}{A} \right) \right), u_2^* = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{I_h}{B}(\gamma_5 - \gamma_6) \right) \right).$$

Pada pengontrol  $u_1^*$  dan  $u_2^*$  diketahui terdapat variabel *state* dan *co-state*. Sehingga langkah selanjutnya yaitu menyelesaikan persamaan *state* dan persamaan *co-state*.

Persamaan *state* dapat diselesaikan melalui  $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma}$ , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \dot{S}_r &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_1} = c_r S_r \left( 1 - \frac{S_r}{M_1} \right) - \frac{t_r S_r I_r}{1 + \alpha I_r} \\ \dot{I}_r &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_2} = \frac{t_r S_r I_r}{1 + \alpha I_r} - \mu_r I_r \\ \dot{S}_h &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_3} = b_h S_h \left( 1 - \frac{S_h}{M_2} \right) - (1 - u_1) \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} + a_h R_h \\ \dot{E}_h &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_4} = (1 - u_1) \frac{t_h S_h I_r}{1 + \beta I_h} - \mu_h E_h - \delta_h E_h \\ \dot{I}_h &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_5} = \delta_h E_h - \mu_h I_h - d_h I_h - r_h I_h - u_2 I_h \\ \dot{R}_h &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_6} = r_h I_h - a_h R_h - \mu_h R_h + u_2 I_h \end{aligned}$$

Persamaan *co-state* diperoleh melalui  $\dot{\gamma} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$ , dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_r} = -\left[ \gamma_1 \left( c_r \left( 1 - \frac{S_r}{M_1} \right) + c_r S_r \left( -\frac{1}{M_1} \right) - \frac{t_r I_r}{1 + \alpha I_r} \right) + \gamma_2 \left( \frac{t_r I_r}{1 + \alpha I_r} \right) \right] \\ \dot{\gamma}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_r} = -\left[ \gamma_1 \left( \frac{-t_r S_r (1 + \alpha I_r) + t_r S_r I_r \alpha}{(1 + \alpha I_r)^2} \right) + \gamma_2 \left( \frac{t_r S_r (1 + \alpha I_r) - t_r S_r I_r \alpha}{(1 + \alpha I_r)^2} - \mu_r \right) + \gamma_3 \left( \frac{-(1 - u_1) t_h S_h (1 + \beta I_r) + (1 - u_1) t_h S_h I_r \beta}{(1 + \beta I_r)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_4 \left( \frac{(1 - u_1) t_h S_h (1 + \beta I_r) - (1 - u_1) t_h S_h I_r \beta}{(1 + \beta I_r)^2} \right) \right] \\ \dot{\gamma}_3 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_h} = -\left[ \gamma_3 \left( b_h \left( 1 - \frac{S_h}{M_2} \right) + b_h S_h \left( -\frac{1}{M_2} \right) - (1 - u_1) (t_h I_r (1 + \beta I_h) + t_h S_h I_r \beta) \right) + \gamma_4 \left( (1 - u_1) (t_h I_r (1 + \beta I_h) + t_h S_h I_r \beta) \right) \right] \\ \dot{\gamma}_4 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_h} = \delta_h (\gamma_4 - \gamma_5) + \mu_h \gamma_4 \end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_5 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_h} = \frac{(1-u_1)t_h S_h I_r \beta}{(1+\beta I_r)^2} (\gamma_4 - \gamma_3) + r_h (\gamma_5 - \gamma_6) + \gamma_5 \mu_h + \gamma_5 d_h + u_2 (\gamma_5 - \gamma_6)$$

$$\dot{\gamma}_6 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R_h} = a_h (\gamma_6 - \gamma_3) + \gamma_6 \mu_h$$

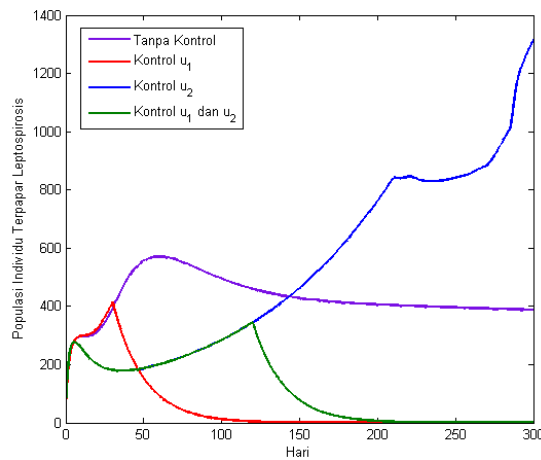
dengan  $\gamma_i(t_f) = 0, i = 1,2,3,4,5,6$ .

Berdasarkan persamaan state dan co-state akan diperoleh nilai variabel state dan co-state yang selanjutnya disubsitusikan pada variabel kontrol  $u_1^*$  dan  $u_2^*$ . Kemudian persamaan  $u_1^*$  dan  $u_2^*$  disubsitusikan ke dalam persamaan *state* untuk memperoleh bentuk solusi yang optimal. Kemudian untuk mendapatkan  $S_r, I_r, S_h, E_h, I_h$  dan  $R_h$  dari bentuk  $u_1^*$  dan  $u_2^*$  yang optimal maka langkah yang harus dilakukan selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan *state* yang berbentuk persamaan diferensial non linier. Karena penyelesaian persamaan diferensial non linier sulit untuk diselesaikan secara analitik, maka dilakukan pendekatan numerik dengan menggunakan *software* MATLAB.

## 6 Simulasi Numerik

Simulasi numerik ini bertujuan untuk mengetahui sejauh mana efektivitas dari upaya pencegahan dan upaya pengobatan sebagai bentuk kontrol mampu meminimalkan penyebaran *Leptospirosis*. Pada simulasi ini, persamaan state didefinisikan dengan  $S_r = y(1), I_r = y(2), S_h = y(3), E_h = y(4), I_h = y(5)$  dan  $R_h = y(6)$ . Selain itu, indeks performansi didefinisikan sebagai *state* baru yakni  $y(7)$ , sedangkan untuk pengontrol  $u_1$  didefinisikan dengan  $u(1)$  dan pengontrol  $u_2$  didefinisikan dengan  $u(2)$ .

Simulasi tersebut dilakukan dengan membandingkan model matematika *Leptospirosis* sebelum dan setelah pemberian kontrol. Nilai awal yang diberikan pada simulasi ini adalah  $S_r(0) = 80, I_r(0) = 50, S_h(0) = 180, E_h(0) = 50, I_h(0) = 50$  dan  $R_h(0) = 30$  dengan waktu pengamatan dilakukan pada saat  $t = 0$  hingga  $t = 300$  dalam satuan hari. Selain itu, konstanta pembobot untuk biaya pencegahan dan biaya pengobatan berturut-turut adalah  $A = 1$  dan  $B = 1$ . Adapun nilai parameter yang digunakan sesuai dengan **Tabel 3**. Berikut adalah hasil simulasi numerik model matematika penyebaran *Leptospirosis* dengan kontrol optimal.



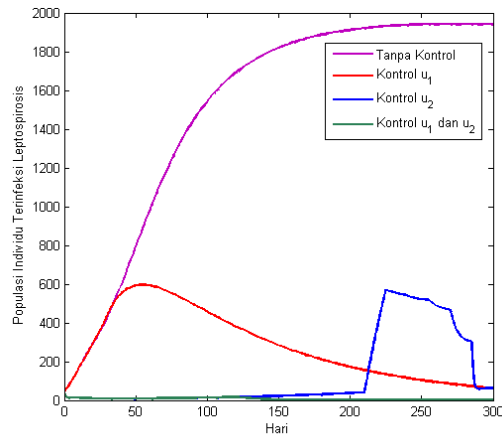
**Gambar 5** Grafik Populasi Individu yang Terpapar *Leptospirosis* Sebelum dan Sesudah Diberi Kontrol

Berdasarkan **Gambar 5**, diperoleh perbandingan populasi individu yang terpapar *Leptospirosis* sebelum dan sesudah diberi kontrol dengan tiga skenario. Perbandingan tersebut dapat dilihat pada **Tabel 6** berikut.

**Tabel 6** Perbandingan populasi individu yang terpapar *Leptospirosis* ( $E_h$ ) pada waktu akhir pengamatan

Skenario	Jumlah Populasi $E_h$
Tanpa Kontrol	399
Dengan Kontrol $u_1$	0
Dengan Kontrol $u_2$	1315
Dengan Kontrol $u_1 u_2$	0

Berdasarkan **Tabel 6** terlihat adanya perbedaan jumlah populasi individu yang terpapar *Leptospirosis* ( $E_h$ ) sebelum diberi dan setelah diberi kontrol. Hal ini ditunjukkan dengan adanya penurunan jumlah individu setelah pemberian kontrol upaya pencegahan dan setelah pemberian kontrol upaya pencegahan dan pengobatan secara bersamaan. Dari beberapa skenario pemberian kontrol, upaya pencegahan dan pengobatan yang diterapkan secara bersamaan paling efektif dalam mengurangi jumlah individu yang terpapar *Leptospirosis* ( $E_h$ ) pada akhir pengamatan.



**Gambar 6** Grafik Populasi Individu yang Terinfeksi *Leptospirosis* Sebelum dan Sesudah Diberi Kontrol

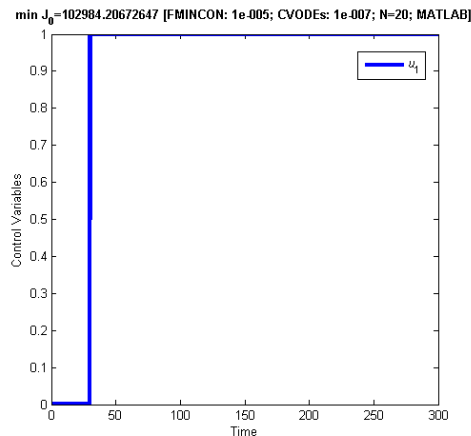
Berdasarkan **Gambar 6**, diperoleh perbandingan populasi individu yang terpapar *Leptospirosis* sebelum dan sesudah diberi kontrol dengan tiga skenario. Perbandingan tersebut dapat dilihat pada **Tabel 7** berikut.

**Tabel 7** Perbandingan populasi individu yang terinfeksi *Leptospirosis* ( $I_h$ ) pada waktu akhir pengamatan

Kondisi	Jumlah Populasi $I_h$
Tanpa Kontrol	1940
Dengan Kontrol $u_1$	63
Dengan Kontrol $u_2$	64
Dengan Kontrol $u_1 u_2$	0

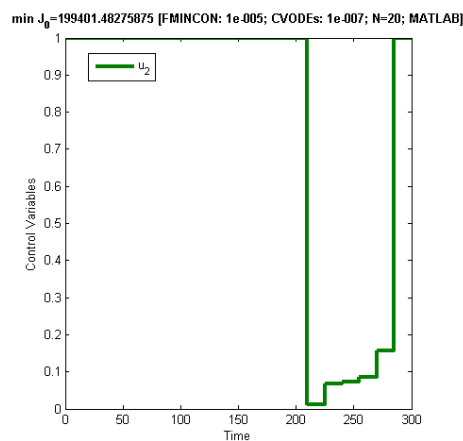
Berdasarkan **Tabel 7** terlihat adanya perbedaan jumlah populasi individu yang terinfeksi *Leptospirosis* ( $I_h$ ) sebelum diberi dan setelah diberi kontrol. Hal ini ditunjukkan dengan adanya penurunan jumlah individu setelah pemberian kontrol upaya pencegahan dan setelah pemberian kontrol upaya pencegahan dan pengobatan secara bersamaan. Dari beberapa skenario pemberian kontrol, upaya pencegahan dan pengobatan yang diterapkan secara bersamaan paling efektif dalam mengurangi jumlah individu yang terinfeksi *Leptospirosis* ( $I_h$ ) pada akhir pengamatan. Selanjutnya, hasil simulasi numerik untuk profil kontrol  $u_1, u_2$ , serta  $u_1$  dan  $u_2$  berturut-turut akan disajikan pada **Gambar 7**, **Gambar 8**, dan **Gambar 9** berikut.





**Gambar 7** Grafik profil kontrol upaya pencegahan ( $u_1$ )

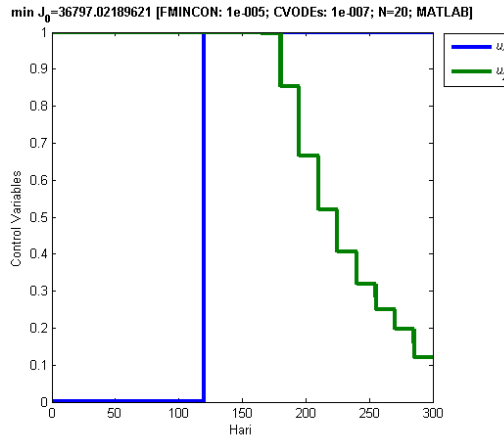
**Gambar 7** menunjukkan bahwa presentase strategi  $u_1$  yaitu pencegahan berupa sanitasi lingkungan untuk mengurangi jumlah individu yang terpapar dan terinfeksi *Leptospirosis*. Upaya pencegahan berupa sanitasi lingkungan pada awal pengamatan hingga hari ke-120 adalah sebesar 0%. Kemudian mengalami peningkatan hingga akhir pengamatan yaitu hari ke-300 mejadi 100% yang artinya upaya pencegahan berupa sanitasi lingkungan dilakukan sepenuhnya secara intensif.



**Gambar 8** Grafik profil kontrol upaya pengobatan ( $u_2$ )

Berdasarkan **Gambar 8** menunjukkan bahwa strategi  $u_2$  yaitu upaya pengobatan yang dilakukan untuk mengurangi jumlah individu yang terpapar dan terinfeksi *Leptospirosis*. Upaya pengobatan pada awal pengamatan hingga hari ke-209 adalah sebesar 100%. Selanjutnya pada hari ke-210 upaya pengobatan mengalami penurunan hingga menjadi 12%, kemudian mengalami peningkatan secara bertahap pada hari ke-285 menjadi 16%,

hingga akhir pengamatan menjadi yaitu hari ke-300 menjadi 100% yang artinya upaya pencegahan berupa pengobatan dilakukan sepenuhnya secara intensif.



**Gambar 9** Grafik profil kontrol upaya pencegahan ( $u_1$ ) dan pengobatan ( $u_2$ )

Berdasarkan **Gambar 9** menunjukkan bahwa presentase strategi  $u_1$  dan  $u_2$  yaitu upaya pencegahan berupa sanitasi lingkungan dan upaya pengobatan yang dilakukan secara bersamaan untuk mengurangi jumlah individu yang terpapar dan terinfeksi *Leptospirosis*. Upaya pencegahan berupa sanitasi lingkungan pada awal pengamatan hingga hari ke-120 adalah sebesar 0%. Kemudian mengalami peningkatan hingga akhir pengamatan yaitu hari ke-300 mejadi 100%. Sedangkan upaya pengobatan pada awal pengamatan hingga hari ke-164 adalah sebesar 100%. Selanjutnya pada hari ke-165 hingga akhir pengamatan upaya pengobatan berangsur-angsur mengalami penurunan hingga menjadi 15%. Adapun perbandingan fungsi ongkos yang dibutuhkan untuk setiap skenario yang disimulasikan disajikan pada **Tabel 8**.

**Tabel 8** Perbandingan Fungsi Ongkos

No	Skenario	Nilai Fungsi Ongkos
1	Dengan kontrol $u_1$	102984.2067
2	Dengan kontrol $u_2$	199401.4827
3	Dengan kontrol $u_1$ dan $u_2$	36797.0218

**Tabel 8** menunjukkan nilai fungsi ongkos atas indeks performansi yang dikeluarkan dalam jangka waktu 300 hari. Nilai fungsi ongkos terbesar adalah pada saat penerapan skenario 2 yaitu upaya pengobatan. Sedangkan untuk nilai fungsi ongkos terkecil adalah pada saat penerapan skenario 3, yaitu upaya pencegahan berupa sanitasi lingkungan dan pengobatan yang dilakukan secara bersamaan.

Penerapan kontrol yang optimal dilihat berdasarkan perubahan jumlah populasi sebelum dan sesudah pemberian kontrol serta nilai fungsi ongkos yang dikeluarkan. Berdasarkan simulasi sebelum dan sesudah pemberian kontrol menggunakan metode DOTcvp, dengan menerapkan tiga skenario dapat dilihat bahwa penerapan upaya pencegahan berupa sanitasi lingkungan ( $u_1$ ) serta upaya pengobatan ( $u_2$ ) yang dilakukan secara bersamaan merupakan Langkah yang selali mengurangi populasi individu yang terpapar *Leptospirosis* ( $E_h$ ) dan populasi individu yang terinfeksi *Leptospirosis* ( $u_2$ ). Dengan demikian dapat ditarik kesimpulan bahwa strategi kontrol yang optimal untuk diterapkan adalah dengan menerapkan upaya pencegahan berupa sanitasi lingkungan ( $u_1$ ) serta upaya pengobatan ( $u_2$ ) yang dilakukan secara bersamaan.

## 7 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika penyebaran *Leptospirosis* dengan *saturated incidence rate* memiliki dua titik setimbang yaitu titik setimbang non endemik dan titik setimbang endemik. Titik setimbang non endemik akan stabil asimtotis jika memenuhi syarat yaitu  $R_0 < 1$ . Sedangkan titik setimbang endemik cenderung stabil asimtotis jika  $R_0 > 1$  dengan  $R_0 = \frac{t_r M_1}{\mu_r}$ .
2. Bentuk kontrol optimal model matematika penyebaran *Leptospirosis* dengan *saturated incidence rate* adalah  $u_1^* = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{t_h S_h I_r (\gamma_4 - \gamma_3)}{1 + \beta I_h A} \right) \right)$  dan  $u_2^* = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{I_h}{B} (\gamma_5 - \gamma_6) \right) \right)$
3. Hasil simulasi numerik pada model matematika penyebaran *Leptospirosis* dengan *saturated incidence rate* sebelum dan sesudah pemberian kontrol menunjukkan bahwa pemberian kontrol upaya berupa sanitasi lingkungan ( $u_1$ ) serta upaya pengobatan ( $u_2$ ) yang dilakukan secara bersamaan merupakan Langkah yang efektif untuk meminimalkan jumlah populasi individu yang terpapar *Leptospirosis* ( $E_h$ ), populasi individu yang terinfeksi *Leptospirosis* ( $I_h$ ), sekaligus meminimalkan biaya yang dikeluarkan untuk masing-masing kontrol.

## 8 Daftar Pustaka

- [1] Adler, B. & Moctezuma, A., 2010, *Leptospira and Leptospirosis*, Journal of Veterinary Microbiology, **140**, 287-296.
- [2] Babylon, A.M., Roberts, M.G., & Wake, G.C., 2018, *Modelling leptospirosis in livestock*. Theoretical Population Biology, **121**, 26–32.
- [3] Devishree, R.A., 2015, *Management of Leptospirosis; A Short Review*, Journal of Pharmaceutical Sciences and Research, **7**, 759-761.

- [4] Gallego, M.A., & Simoy, M.V., 2021, *Mathematical modeling of leptospirosis: A dynamic regulated by environmental carrying capacity*, Chaos, Solitons and Fractals. **152**, 111425.
- [5] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2017, *Buku Petunjuk Teknis Pengendalian Leptospirosis*, Cetakan ke-3, pp. 8-9.
- [6] Khan, M.A., Saddiq, S.F., Islam, S., Khan, I. & Shafie, S., 2015, *Dynamic Behavior of Leptospirosis Disease with Saturated Incidence Rate*, International Journal of Applied Mathematics and Informations Sciences, **8**, 1049-1056.
- [7] Kusmiyati, Noor, S.M. & Supar, 2005, *Leptospirosis pada Hewan dan Manusia di Indonesia*. WARTAZOA. **15**(4), 213-220.
- [8] Widjajanti, W., 2019, *Epidemiologi, Diagnosis, dan Pencegahan Leptospirosis*, Journal of Health Epidemiology and Communicable Disease, **5**(2), 62-68.