Contemporary Mathematics and Applications
Vol. 6, No. 1, 2024, pp. 27-45.

Dimensi Partisi pada Graf Hasil Operasi Korona Tingkat-k

Ummi Nur Yatun Hasanah[1], Rica Amalia[2], Faisol[3], Tony Yulianto[4], Kuzairi[5]

[1,2,3,4,5]Universitas Islam Madura

[2]Corresponding author: ricaamalia5@gmail.com

Abstract. Graph theory is one of the subjects in Discrete Mathematics that have long been known and are widely applied in various fields. The topics that are often discussed in graph theory include labeling, coloring, chromatic numbers, metric dimensions, and partition dimensions. Partition dimensions are obtained by grouping all the vertices on the graph into a number of partition classes, then determine the distance of all vertices to each partition class to get a representation. Partition class which representations have different coordinate vectors is called resolving partition. The minimum cardinality of resolving partition is called partition dimensions of the graph. The purpose of this study is to determine the partition dimensions of k-level corona operation graphs which are $G\odot^k P_m$, $G\odot^k C_m$, and $G\odot^k K_m$, where G, P_m, C_m, and K_m are connected non trivial graph, path graph, circle graph and complete graph respectively, and any integer $k \geq 1$.

Keywords: *circle graph, complete graph, k-level corona operation, partition dimensions, path graph.*

1 Pendahuluan

Teori graf adalah subjek di Matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh Matematikawan Swiss bernama Leonard Euler pada tahun 1736, sebagai usaha untuk menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg [1]. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek – objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Dalam sebuah graf, objek digambarkan sebagai titik sedangkan hubungan antar objek digambarkan sebagai sisi [2]. Salah satu kajian dalam teori graf adalah dimensi metrik yang kemudian dikembangkan menjadi dimensi partisi.

Dimensi partisi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk pada tahun 2000 [3] sebagai variasi dari dimensi metrik [4]. Dimensi partisi diperoleh dengan cara mengelompokkan semua simpul pada graf ke dalam sejumlah kelas partisi. Selanjutnya menentukan jarak seluruh simpul terhadap setiap kelas partisi untuk mendapatkan representasi. Representasi yang memiliki vektor koordinat berbeda dan memiliki jumlah kardinalitas minimum merupakan dimensi partisi dari graf [5].

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung tak trivial dengan $V(G)$ adalah himpunan titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi. Diberikan himpunan-himpunan titik $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq V(G)$ dengan $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k = V(G)$ dan $S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_k = \emptyset$. Himpunan $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ disebut partisi pembeda jika k-vektor $r(v|\Pi) =$

$\left(d(v,S_1),d(v,S_2),\ldots,d(v,S_k)\right)$, yang merupakan representasi dari v terhadap Π, berbeda untuk setiap $v\in V(G)$, dengan $d(v,S)$ didefinisikan sebagai $d(v,S)=\min\{d(v,x)|x\in S\}$. Partisi pembeda dengan kardinalitas terkecil disebut dimensi partisi dan dinotasikan dengan $pd(G)$ [3].

Beberapa peneliti sebelumnya yang menyingung mengenai dimensi partisi graf dengan operasi tertentu antara lain dimensi partisi graf hasil operasi comb graf lingkaran dan lintasan [6], dimensi partisi pada graf amalgamasi siklus [7], dimensi partisi pada graf sunlet dan amalgamasi graf sunlet [8]. Diantara penelitian-penelitian tersebut, belum ada penelitian mengenai dimensi partisi pada graf hasil operasi korona tingkat-k. Oleh karena itu penulis berharap dengan adanya penelitian ini dapat menambah referensi mengenai dimensi partisi graf dengan operasi tertentu. Adapun graf yang diteliti dibatasi yaitu $G\odot^k P_m$, $G\odot^k C_m$, dan $G\odot^k K_m$, dengan G, P_m, C_m, dan K_m masing-masing adalah graf terhubung tak trivial, graf lintasan, graf siklus dan graf lengkap, serta k adalah bilangan asli.

2 Metode Penelitian

Metode penelitian dan tahapan-tahapan yang digunakan untuk memecahkan permasalahan dalam penelitian ini adalah melakukan studi literatur dari referensi buku, artikel dan jurnal dari berbagai sumber. Untuk mendapatkan dimensi partisi dari graf hasil operasi korona tingkat-k, langkah pertama adalah mendapatkan dimensi partisi dari graf hasil operasi korona dengan menggunakan pendeteksian pola partisi titik-titik. Kemudian dengan menggunakan prinsip induksi matematika akan dibuktikan untuk nilai k sebarang bilangan asli. Lalu dilakukan evaluasi dan menyimpulkan penelitian.

3 Hasil dan Pembahasan

Sebelum membahas dimensi partisi pada graf hasil operasi korona tingkat-k, terlebih dahulu akan dibahas dimensi partisi pada graf hasil operasi korona. Graf yang dibahas adalah $G\odot P_m$, $G\odot C_m$, dan $G\odot K_m$ dengan G adalah graf terhubung tak trivial. Istilah orde atau ordo dalam graf adalah banyaknya titik pada graf tersebut.

Teorema 1. *Dimensi partisi pada graf hasil operasi korona $G\odot P_m$ adalah*

$$pd(G\odot P_m)=pd(G)+\begin{cases}2 & \text{jika } m\le 4\\ 2+\left\lceil\dfrac{m-4}{3}\right\rceil & \text{jika } m>4\end{cases}$$

Bukti. Misalkan graf G berorde n dan W adalah partisi pembeda dari G dengan $|W|=pd(G)$. Diberikan $V(G\odot P_m)=\{v_i|i=1,2,\ldots,n\}\cup\{v_i^j|i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,m\}$

dan $E(G\odot P_m) = E(G) \cup \{v_i v_i^j \mid i = 1,2,\dots,n; j = 1,2,\dots,m\} \cup \{v_i^j v_i^{j+1} \mid i = 1,2,\dots,n;$ $j = 1,2,\dots,m-1\}$.

Kasus 1. Untuk $m \leq 4$

Diberikan $\Pi = \{S_1, S_2\} \cup W$ dengan:

Untuk $m = 2$	Untuk $m = 3$	Untuk $m = 4$
$S_1 = \{v_i^1 \mid i = 1,2,\dots,n\}$ $S_2 = \{v_i^2 \mid i = 1,2,\dots,n\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 3,4,\dots,pd(G)+2$	$S_1 = \{v_i^1, v_i^2 \mid i = 1,2,\dots,n\}$ $S_2 = \{v_i^3 \mid i = 1,2,\dots,n\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 3,4,\dots,pd(G)+2$	$S_1 = \{v_i^1, v_i^2 \mid i = 1,2,\dots,n\}$ $S_2 = \{v_i^3, v_i^4 \mid i = 1,2,\dots,n\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 3,4,\dots,pd(G)+2$

Karena W adalah partisi pembeda dari graf G maka $r(v_i \mid W) \neq r(v_j \mid W), \forall v_i, v_j \in V(G)$. Akibatnya $r(v_i \mid \Pi) \neq r(v_j \mid \Pi), \forall v_i, v_j \in V(G)$. Berikutnya representasi $v_i^j, v_k^l \in V(G\odot P_m)\backslash V(G)$ terhadap Π adalah:

Untuk $m = 2$	Untuk $m = 3$	Untuk $m = 4$
$S_1: \begin{cases} r(v_1^1 \mid \Pi) = (0,1,d(v_1^1,w)) \\ r(v_2^1 \mid \Pi) = (0,1,d(v_2^1,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^1 \mid \Pi) = (0,1,d(v_n^1,w)) \end{cases}$ $S_2: \begin{cases} r(v_1^2 \mid \Pi) = (1,0,d(v_1^1,w)) \\ r(v_2^2 \mid \Pi) = (1,0,d(v_2^2,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^2 \mid \Pi) = (1,0,d(v_n^2,w)) \end{cases}$	$S_1: \begin{cases} r(v_1^1 \mid \Pi) = (0,2,d(v_1^1,w)) \\ r(v_1^2 \mid \Pi) = (0,1,d(v_1^2,w)) \\ r(v_2^1 \mid \Pi) = (0,2,d(v_2^1,w)) \\ r(v_2^2 \mid \Pi) = (0,1,d(v_2^2,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^1 \mid \Pi) = (0,2,d(v_n^1,w)) \\ r(v_n^2 \mid \Pi) = (0,1,d(v_n^2,w)) \end{cases}$ $S_2: \begin{cases} r(v_1^3 \mid \Pi) = (1,0,d(v_1^3,w)) \\ r(v_2^3 \mid \Pi) = (1,0,d(v_2^3,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^3 \mid \Pi) = (1,0,d(v_n^3,w)) \end{cases}$	$S_1: \begin{cases} r(v_1^1 \mid \Pi) = (0,2,d(v_1^1,w)) \\ r(v_1^2 \mid \Pi) = (0,1,d(v_1^2,w)) \\ r(v_2^1 \mid \Pi) = (0,2,d(v_2^1,w)) \\ r(v_2^2 \mid \Pi) = (0,1,d(v_2^2,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^1 \mid \Pi) = (0,2,d(v_n^1,w)) \\ r(v_n^2 \mid \Pi) = (0,1,d(v_n^2,w)) \end{cases}$ $S_2: \begin{cases} r(v_1^3 \mid \Pi) = (1,0,d(v_1^3,w)) \\ r(v_1^4 \mid \Pi) = (2,0,d(v_1^4,w)) \\ r(v_2^3 \mid \Pi) = (1,0,d(v_2^3,w)) \\ r(v_2^4 \mid \Pi) = (2,0,d(v_2^4,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^3 \mid \Pi) = (1,0,d(v_n^3,w)) \\ r(v_n^4 \mid \Pi) = (2,0,d(v_n^4,w)) \end{cases}$

Jelas bahwa $d(v_i^j, w) = d(v_i, w) + 1, \forall w \in V(G)$. Karena $r(v_i \mid \Pi) \neq r(v_j \mid \Pi)$ maka $r(v_i^j \mid \Pi) \neq r(v_k^l \mid \Pi)$. Jadi terbukti bahwa Π merupakan partisi pembeda dari graf $G\odot P_m$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa Π adalah partisi pembeda dengan kardinalitas minimum. Diketahui bahwa Π mengelompokkan titik-titik pada graf G menjadi $pd(G)$ buah partisi dan tiap salinan graf P_m ke dalam 2 buah partisi. Pada graf G, $pd(G)$ merupakan jumlah partisi yang paling minimum, sedangkan pada salinan graf P_m partisi yang dibuat harus lebih dari 1 buah, karena $d(v_i^j, w) = d(v_i^k, w)$, untuk setiap $w \in V(G\odot P_m)\backslash\{v_i^l\}$ dengan v_i^l adalah titik yang bertetangga dengan v_i^j dan v_i^k, sehingga partisi sejumlah 2 buah merupakan nilai yang paling minimum.

Jadi $pd(G \odot P_m) = pd(G) + 2$ untuk $m \leq 4$.

Kasus 2. Untuk $m > 4$

Diberikan $\Pi = \left\{S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_{2+\left\lceil\frac{m-4}{3}\right\rceil}\right\} \cup W$ dengan:

$$S_1 = \{v_i^1, v_i^2 | i = 1,2, \dots, n\};$$

$$S_2 = \{v_i^{m-1}, v_i^m | i = 1,2, \dots, n\}$$

Sedangkan untuk $i = 3,6, \dots, 2 + \left\lceil\frac{m-4}{3}\right\rceil$ maka

$$S_i = \{v_1^j, \dots, v_1^{j+k}, v_2^j, \dots, v_2^{j+k}, \dots, v_n^j, \dots, v_n^{j+k}\},$$

dengan $2 < j < m - 1$ dan $k < 3$

Karena W adalah partisi pembeda dari graf G maka $r(v_i|W) \neq r(v_j|W), \forall v_i, v_j \in V(G)$. Akibatnya $r(v_i|\Pi) \neq r(v_j|\Pi), \forall v_i, v_j \in V(G)$. Berikutnya akan dibuktikan bahwa $\forall v_i^j, v_k^l \in V(G \odot P_m) \backslash V(G)$, $r(v_i^j|\Pi) \neq r(v_k^l|\Pi)$ juga. Jelas bahwa $d(v_i^j, w) = d(v_i, w) + 1, \forall w \in V(G)$. Akibatnya karena $r(v_i|\Pi) \neq r(v_k|\Pi)$ maka $r(v_i^j|\Pi) \neq r(v_k^l|\Pi)$ untuk $i \neq k$. Sedangkan untuk $i = k$, $r(v_i^j|\Pi) \neq r(v_i^l|\Pi)$ juga karena $d(v_i^j, v_i^k) \neq d(v_i^l, v_i^k)$ jika v_i^k bertetangga dengan v_i^j tetapi tidak bertetangga dengan v_i^l atau sebaliknya. Jadi terbukti bahwa Π merupakan partisi pembeda dari graf $G \odot P_m$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa Π adalah partisi pembeda dengan kardinalitas minimum. Diketahui bahwa Π mengelompokkan titik-titik pada graf G menjadi $pd(G)$ buah partisi dan tiap salinan graf P_m ke dalam $2 + \left\lceil\frac{m-4}{3}\right\rceil$ buah partisi. Pada graf G, $pd(G)$ merupakan jumlah partisi yang paling minimum, sedangkan pada salinan graf P_m jika partisi yang dibuat kurang dari $2 + \left\lceil\frac{m-4}{3}\right\rceil$ buah, maka terdapat partisi yang memiliki anggota lebih dari 3 titik. Akibatnya, terdapat 2 titik, misal u dan v, sedemikian hingga $r(u|\Pi) = r(v|\Pi)$ karena $d(u, w) = d(v, w), \forall w \in V(G \odot P_m) \backslash \{u, v\}$.

Jadi $pd(G \odot P_m) = pd(G) + 2 + \left\lceil\frac{m-4}{3}\right\rceil$ untuk $m > 4$. ■

Teorema 2. *Dimensi partisi pada graf hasil operasi korona $G \odot C_m$ adalah*

$$pd(G \odot C_m) = pd(G) + \begin{cases} 3 & jika\, m \leq 6 \\ \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil & jika\, m > 6 \end{cases}$$

Bukti. Misalkan graf G berorde n dan W adalah partisi pembeda dari G dengan $|W| = pd(G)$. Diberikan $V(G \odot C_m) = \{v_i | i = 1,2,\dots,n\} \cup \{v_i^j | i = 1,2,\dots,n; j = 1,2,\dots,m\}$ dan $E(G \odot C_m) = E(G) \cup \{v_i v_i^j | i = 1,2,\dots,n; j = 1,2,\dots,m\} \cup \{v_i^j v_i^{j+1} | i = 1,2,\dots,n; j = 1,2,\dots,m-1\} \cup \{v_i^1 v_i^m | i = 1,2,\dots,n\}$.

Kasus 1. Untuk $m \leq 6$

Diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\} \cup W$ dengan:

Untuk $m = 3$	Untuk $m = 4$	Untuk $m = 5$	Untuk $m = 6$
$S_1 = \{v_i^1 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_2 = \{v_i^2 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_3 = \{v_i^3 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 4,5,\dots,pd(G)+3$	$S_1 = \{v_i^1, v_i^2 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_2 = \{v_i^3 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_3 = \{v_i^4 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 4,5,\dots,pd(G)+3$	$S_1 = \{v_i^1, v_i^2 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_2 = \{v_i^3, v_i^4 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_3 = \{v_i^5 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 4,5,\dots,pd(G)+3$	$S_1 = \{v_i^1, v_i^2 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_2 = \{v_i^3, v_i^4 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_3 = \{v_i^5, v_i^6 \| i = 1,2,\dots,n\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 4,5,\dots,pd(G)+3$

Karena W adalah partisi pembeda dari graf G maka $r(v_i|W) \neq r(v_j|W), \forall v_i, v_j \in V(G)$. Akibatnya $r(v_i|\Pi) \neq r(v_j|\Pi), \forall v_i, v_j \in V(G)$. Berikutnya representasi $v_i^j, v_k^l \in V(G \odot C_m) \setminus V(G)$ terhadap Π adalah:

Untuk $m = 3$	Untuk $m = 4$
$S_1: \begin{cases} r(v_1^1 \| \Pi) = (0,1,1,d(v_1^1,w)) \\ r(v_2^1 \| \Pi) = (0,1,1,d(v_2^1,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^1 \| \Pi) = (0,1,1,d(v_n^1,w)) \end{cases}$ $S_2: \begin{cases} r(v_1^2 \| \Pi) = (1,0,1,d(v_1^2,w)) \\ r(v_2^2 \| \Pi) = (1,0,1,d(v_2^2,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^2 \| \Pi) = (1,0,1,d(v_n^2,w)) \end{cases}$ $S_3: \begin{cases} r(v_1^3 \| \Pi) = (1,1,0,d(v_1^3,w)) \\ r(v_2^3 \| \Pi) = (1,1,0,d(v_2^3,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^3 \| \Pi) = (1,1,0,d(v_n^3,w)) \end{cases}$	$S_1: \begin{cases} r(v_1^1 \| \Pi) = (0,2,2,d(v_1^1,w)) \\ r(v_1^2 \| \Pi) = (0,1,2,d(v_1^2,w)) \\ r(v_2^1 \| \Pi) = (0,2,2,d(v_2^1,w)) \\ r(v_2^2 \| \Pi) = (0,1,2,d(v_2^2,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^1 \| \Pi) = (0,2,2,d(v_n^1,w)) \\ r(v_n^2 \| \Pi) = (0,1,2,d(v_n^2,w)) \end{cases}$ $S_2: \begin{cases} r(v_1^3 \| \Pi) = (1,0,1,d(v_1^3,w)) \\ r(v_2^3 \| \Pi) = (1,0,1,d(v_2^3,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^3 \| \Pi) = (1,0,1,d(v_n^3,w)) \end{cases}$ $S_3: \begin{cases} r(v_1^4 \| \Pi) = (2,0,1,d(v_1^4,w)) \\ r(v_2^4 \| \Pi) = (2,0,1,d(v_2^4,w)) \\ \vdots \\ r(v_n^4 \| \Pi) = (2,0,1,d(v_n^4,w)) \end{cases}$

Untuk $m = 5$	Untuk $m = 6$
$S_1: \begin{cases} r(v_1^1\|\Pi) = (0,2,2, d(v_1^1, w)) \\ r(v_1^2\|\Pi) = (0,1,2, d(v_1^2, w)) \\ r(v_2^1\|\Pi) = (0,2,2, d(v_2^1, w)) \\ r(v_2^2\|\Pi) = (0,1,2, d(v_2^2, w)) \\ \vdots \\ r(v_n^1\|\Pi) = (0,2,2, d(v_n^1, w)) \\ r(v_n^2\|\Pi) = (0,1,2, d(v_n^2, w)) \end{cases}$ $S_2: \begin{cases} r(v_1^3\|\Pi) = (1,0,2, d(v_1^3, w)) \\ r(v_1^4\|\Pi) = (2,0,1, d(v_1^4, w)) \\ r(v_2^3\|\Pi) = (1,0,2, d(v_2^3, w)) \\ r(v_2^4\|\Pi) = (2,0,1, d(v_2^4, w)) \\ \vdots \\ r(v_n^3\|\Pi) = (1,0,2, d(v_n^3, w)) \\ r(v_n^4\|\Pi) = (2,0,1, d(v_n^4, w)) \end{cases}$ $S_3: \begin{cases} r(v_1^5\|\Pi) = (2,1,0, d(v_1^5, w)) \\ r(v_2^5\|\Pi) = (2,1,0, d(v_2^5, w)) \\ \vdots \\ r(v_n^5\|\Pi) = (2,1,0, d(v_n^5, w)) \end{cases}$	$S_1: \begin{cases} r(v_1^1\|\Pi) = (0,2,2, d(v_1^1, w)) \\ r(v_1^2\|\Pi) = (0,1,2, d(v_1^2, w)) \\ r(v_2^1\|\Pi) = (0,2,2, d(v_2^1, w)) \\ r(v_2^2\|\Pi) = (0,1,2, d(v_2^2, w)) \\ \vdots \\ r(v_n^1\|\Pi) = (0,2,2, d(v_n^1, w)) \\ r(v_n^2\|\Pi) = (0,1,2, d(v_n^2, w)) \end{cases}$ $S_2: \begin{cases} r(v_1^3\|\Pi) = (1,0,2, d(v_1^3, w)) \\ r(v_1^4\|\Pi) = (2,0,1, d(v_1^4, w)) \\ r(v_2^3\|\Pi) = (1,0,2, d(v_2^3, w)) \\ r(v_2^4\|\Pi) = (2,0,1, d(v_2^4, w)) \\ \vdots \\ r(v_n^3\|\Pi) = (1,0,2, d(v_n^3, w)) \\ r(v_n^4\|\Pi) = (2,0,1, d(v_n^4, w)) \end{cases}$ $S_3: \begin{cases} r(v_1^5\|\Pi) = (2,1,0, d(v_1^5, w)) \\ r(v_1^6\|\Pi) = (2,2,0, d(v_1^6, w)) \\ r(v_2^5\|\Pi) = (2,1,0, d(v_2^5, w)) \\ r(v_2^6\|\Pi) = (2,2,0, d(v_2^6, w)) \\ \vdots \\ r(v_n^5\|\Pi) = (2,1,0, d(v_n^5, w)) \\ r(v_n^6\|\Pi) = (2,2,0, d(v_n^6, w)) \end{cases}$

Jelas bahwa $d(v_i^j, w) = d(v_i, w) + 1, \forall w \in V(G)$. Karena $r(v_i|\Pi) \neq r(v_k|\Pi)$ maka $r(v_i^j|\Pi) \neq r(v_k^l|\Pi)$. Jadi terbukti bahwa Π merupakan partisi pembeda dari graf $G \odot C_m$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa Π adalah partisi pembeda dengan kardinalitas minimum. Diketahui bahwa Π mengelompokkan titik-titik pada graf G menjadi $pd(G)$ buah partisi dan tiap salinan graf C_m ke dalam 3 buah partisi. Pada graf G, $pd(G)$ merupakan jumlah partisi yang paling minimum, sedangkan pada salinan graf C_m, 3 buah partisi merupakan nilai yang paling minimum juga.

Jadi $pd(G \odot C_m) = pd(G) + 3$ untuk $m \leq 6$.

Kasus 2. Untuk $m > 6$

Diberikan $\Pi = \left\{S_1, S_2, \ldots, S_{\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil}\right\} \cup W$ dengan:

$S_1 = \{v_i^1, v_i^2, v_i^3 | i = 1,2, \dots, n\}$

$S_2 = \{v_i^4, v_i^5, v_i^6 | i = 1,2, \dots, n\}$

$\vdots$

$S_{\lceil \frac{m}{3} \rceil} = \left\{v_i^j \middle| i = 1,2, \dots, n; j = 3\left(\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1\right) + k; 1 \leq k < m(mod)3\right\}$

Karena W adalah partisi pembeda dari graf G maka $r(v_i|W) \neq r(v_j|W), \forall v_i, v_j \in V(G)$. Akibatnya $r(v_i|\Pi) \neq r(v_j|\Pi), \forall v_i, v_j \in V(G)$. Berikutnya akan dibuktikan bahwa $\forall v_i^j, v_k^l \in V(G\odot C_m)\backslash V(G)$, $r(v_i^j|\Pi) \neq r(v_k^l|\Pi)$ juga. Jelas bahwa $d(v_i^j, w) = d(v_i, w) + 1, \forall w \in V(G)$. Akibatnya karena $r(v_i|\Pi) \neq r(v_k|\Pi)$ maka $r(v_i^j|\Pi) \neq r(v_k^l|\Pi)$ untuk $i \neq k$. Sedangkan untuk $i = k$ $r(v_i^j|\Pi) \neq r(v_i^l|\Pi)$ juga karena $d(v_i^j, v_i^k) \neq d(v_i^l, v_i^k)$ jika v_i^k bertetangga dengan v_i^j tetapi tidak bertetangga dengan v_i^l atau sebaliknya. Jadi terbukti bahwa Π merupakan partisi pembeda dari graf $G\odot C_m$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa Π adalah partisi pembeda dengan kardinalitas minimum. Diketahui bahwa Π mengelompokkan titik-titik pada graf G menjadi $pd(G)$ buah partisi dan tiap salinan graf C_m ke dalam $\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$ buah partisi. Pada graf G, $pd(G)$ merupakan jumlah partisi yang paling minimum, sedangkan pada salinan graf C_m jika partisi yang dibuat kurang dari $\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$ buah, maka terdapat partisi yang memiliki anggota lebih dari 3 titik. Akibatnya, terdapat 2 titik, misal u dan v, sedemikian hingga $r(u|\Pi) = r(v|\Pi)$ karena $d(u, w) = d(v, w), \forall w \in V(G\odot C_m)\backslash\{u, v\}$.

Jadi $pd(G\odot C_m) = pd(G) + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$ untuk $m > 6$. ■

Teorema 3. *Dimensi partisi pada graf hasil operasi korona $G\odot K_m$ adalah*

$$pd(G\odot K_m) = pd(G) + m$$

Bukti. Misalkan graf G berorde n dan W adalah partisi pembeda dari G dengan $|W| = pd(G)$. Diberikan $V(G\odot K_m) = \{v_i | i = 1,2, \dots, n\} \cup \{v_i^j | i = 1,2, \dots, n; j = 1,2, \dots, m\}$ dan $E(G\odot K_m) = E(G) \cup \{v_i v_i^j | i = 1,2, \dots, n; j = 1,2, \dots, m\} \cup \{v_i^j v_i^k | i = 1,2, \dots, n; j, k = 1,2, \dots, m\}$.

Diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_m\} \cup W$ dengan:

$S_1 = \{v_i^1 | i = 1,2, \dots, n\}$

$S_2 = \{v_i^2 | i = 1,2, \dots, n\}$

$\vdots$

$S_{m-1} = \{v_i^{m-1} | i = 1,2, \dots, n\}$

$S_m = \{v_i^m | i = 1,2, \dots, n\}$

Karena W adalah partisi pembeda dari graf G maka $r(v_i|W) \neq r(v_j|W), \forall v_i, v_j \in V(G)$. Akibatnya $r(v_i|\Pi) \neq r(v_j|\Pi), \forall v_i, v_j \in V(G)$. Berikutnya representasi $v_i^j, v_k^l \in V(G \odot K_m) \setminus V(G)$ terhadap Π adalah:

$$S_1: \begin{cases} r(v_1^1|\Pi) = (0,1,1, \dots, 1, d(v_1^1, w)) \\ r(v_2^1|\Pi) = (0,1,1, \dots, 1, d(v_2^1, w)) \\ \vdots \\ r(v_n^1|\Pi) = (0,1,1, \dots, 1, d(v_n^1, w)) \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} r(v_1^2|\Pi) = (1,0,1, \dots, 1, d(v_1^2, w)) \\ r(v_2^2|\Pi) = (1,0,1, \dots, 1, d(v_2^2, w)) \\ \vdots \\ r(v_n^2|\Pi) = (1,0,1, \dots, 1, d(v_n^2, w)) \end{cases}$$

$\vdots$

$$S_{m-1}: \begin{cases} r(v_1^{m-1}|\Pi) = (1,1,1, \dots, 0, 1, d(v_1^{m-1}, w)) \\ r(v_2^{m-1}|\Pi) = (1,1,1, \dots, 0, 1, d(v_2^{m-1}, w)) \\ \vdots \\ r(v_n^{m-1}|\Pi) = (1,1,1, \dots, 0, 1, d(v_n^{m-1}, w)) \end{cases}$$

$$S_m: \begin{cases} r(v_1^m|\Pi) = (1,1,1, \dots, 1, 0, d(v_1^m, w)) \\ r(v_2^m|\Pi) = (1,1,1, \dots, 1, 0, d(v_2^m, w)) \\ \vdots \\ r(v_n^m|\Pi) = (1,1,1, \dots, 1, 0, d(v_n^m, w)) \end{cases}$$

Jelas bahwa $d(v_i^j, w) = d(v_i, w) + 1, \forall w \in V(G)$. Karena $r(v_i|\Pi) \neq r(v_k|\Pi)$ maka $r(v_i^j|\Pi) \neq r(v_k^l|\Pi)$. Jadi terbukti bahwa Π merupakan partisi pembeda dari graf $G \odot K_m$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa Π adalah partisi pembeda dengan kardinalitas minimum. Diketahui bahwa Π mengelompokkan titik-titik pada graf G menjadi $pd(G)$ buah partisi dan tiap salinan graf K_m ke dalam m buah partisi. Pada graf G, $pd(G)$

merupakan jumlah partisi yang paling minimum, sedangkan pada salinan graf K_m, m merupakan jumlah partisi yang paling minimum juga.

Jadi $pd(G \odot K_m) = pd(G) + m$. ■

Selanjutnya akan dibahas dimensi partisi pada graf hasil operasi korona tingkat-k dengan k adalah sebarang bilangan asli. Berikut ini adalah definisi operasi korona tingkat-k.

Definisi 1. Misalkan G dan H adalah graf terhubung tak trivial. Graf hasil operasi korona tingkat-k antara G dan H dengan $k \geq 2$ dan $k \in \mathbb{N}$, dinotasikan oleh $G \odot^k H$, didefinisikan sebagai $(G \odot^{k-1} H) \odot H$

Teorema 4. *Dimensi partisi pada graf hasil operasi korona $G \odot^k P_m$ adalah*

$$pd(G \odot^k P_m) = pd(G) + k \begin{cases} 2 & jika\, m \leq 4 \\ 2 + \left\lceil \frac{m-4}{3} \right\rceil & jika\, m > 4 \end{cases}$$

Bukti. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan teorema ini.
Langkah Awal:

Untuk $k = 1$ akan dibuktikan $pd(G \odot P_m) = pd(G) + \begin{cases} 2 & jika\, m \leq 4 \\ 2 + \left\lceil \frac{m-4}{3} \right\rceil & jika\, m > 4 \end{cases}$

Berdasarkan Teorema 1, terbukti bahwa

$$pd(G \odot P_m) = pd(G) + \begin{cases} 2 & jika\, m \leq 4 \\ 2 + \left\lceil \frac{m-4}{3} \right\rceil & jika\, m > 4 \end{cases}$$

Langkah Induksi:

Jika $pd(G \odot^k P_m) = pd(G) + k \begin{cases} 2 & jika\, m \leq 4 \\ 2 + \left\lceil \frac{m-4}{3} \right\rceil & jika\, m > 4 \end{cases}$ maka akan dibuktikan bahwa $pd(G \odot^{k+1} P_m) = pd(G) + (k+1) \begin{cases} 2 & jika\, m \leq 4 \\ 2 + \left\lceil \frac{m-4}{3} \right\rceil & jika\, m > 4 \end{cases}$

Diberikan $V(G \odot^{k+1} P_m) = V(G \odot^k P_m) \cup \{u_i^j \,|\, i = 1,2, \dots, |V(G \odot^k P_m)|; j = 1,2, \dots, m\}$.

Kasus 1. Untuk $m \leq 4$

Diketahui bahwa $pd(G \odot^k P_m) = pd(G) + 2k$. Akan dibuktikan bahwa $pd(G \odot^{k+1} P_m) = pd(G) + 2(k+1) = pd(G) + 2k + 2$.

Misalkan W adalah partisi pembeda dari graf $G\odot^k P_m$ kemudian diberikan $\Pi = \{S_1, S_2\} \cup W$ dengan:

Untuk $m = 2$	Untuk $m = 3$	Untuk $m = 4$
$S_1 = \{u_i^1 \| i = 1,2, \ldots, \|V(G\odot^k P_m)\|\}$ $S_2 = \{u_i^2 \| i = 1,2, \ldots, \|V(G\odot^k P_m)\|\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 3,4, \ldots, pd(G) + 2k + 2$	$S_1 = \{u_i^1, u_i^2 \| i = 1,2, \ldots, \|V(G\odot^k P_m)\|\}$ $S_2 = \{u_i^3 \| i = 1,2, \ldots, \|V(G\odot^k P_m)\|\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 3,4, \ldots, pd(G) + 2k + 2$	$S_1 = \{u_i^1, u_i^2 \| i = 1,2, \ldots, \|V(G\odot^k P_m)\|\}$ $S_2 = \{u_i^3, u_i^4 \| i = 1,2, \ldots, \|V(G\odot^k P_m)\|\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 3,4, \ldots, pd(G) + 2k + 2$

Karena W adalah partisi pembeda dari graf $G\odot^k P_m$ maka $r(u|W) \neq r(v|W), \forall u, v \in V(G\odot^k P_m)$. Akibatnya $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi), \forall u, v \in V(G\odot^k P_m)$. Berikutnya akan dibuktikan bahwa $\forall u_i^j, u_k^l \in V(G\odot^{k+1} P_m) \backslash V(G\odot^k P_m)$, $r(u_i^j|\Pi) \neq r(u_k^l|\Pi)$ juga. Jelas bahwa $d(u_i^j, w) = d(v_i, w) + 1, \forall w \in V(G\odot^k P_m)$ dan v_i adalah titik terluar dari graf $G\odot^k P_m$. Karena $r(v_i|\Pi) \neq r(v_k|\Pi)$ maka $r(u_i^j|\Pi) \neq r(u_k^l|\Pi)$. Jadi terbukti bahwa Π merupakan partisi pembeda dari graf $G\odot^{k+1} P_m$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa Π adalah partisi pembeda dengan kardinalitas minimum. Diketahui bahwa Π mengelompokkan titik-titik pada graf $G\odot^k P_m$ menjadi $pd(G) + 2k$ buah partisi dan tiap salinan graf P_m ke dalam 2 buah partisi. Pada graf $G\odot^k P_m$, $pd(G) + 2k$ merupakan jumlah partisi yang paling minimum, sedangkan pada salinan graf P_m partisi yang dibuat harus lebih dari 1 buah, karena $d(u_i, w) = d(u_j, w)$, untuk setiap $w \in V(G\odot^{k+1} P_m) \backslash \{u_k\}$ dengan u_k adalah titik yang bertetangga dengan u_i dan u_j, sehingga partisi sejumlah 2 buah merupakan nilai yang paling minimum.

Jadi $pd(G\odot^{k+1} P_m) = pd(G) + 2k + 2$ untuk $m \leq 4$.

Kasus 2. Untuk $m > 4$

Diketahui bahwa $pd(G\odot^k P_m) = pd(G) + k\left(2 + \left\lceil \frac{m-4}{3} \right\rceil\right)$. Akan dibuktikan bahwa $pd(G\odot^{k+1} P_m) = pd(G) + (k+1)\left(2 + \left\lceil \frac{m-4}{3} \right\rceil\right) = pd(G) + k\left(2 + \left\lceil \frac{m-4}{3} \right\rceil\right) + 2 + \left\lceil \frac{m-4}{3} \right\rceil$.

Misalkan W adalah partisi pembeda dari graf $G\odot^k P_m$ kemudian diberikan $\Pi = \left\{S_1, S_2, \ldots, S_{2+\left\lceil \frac{m-4}{3} \right\rceil}\right\} \cup W$ dengan:

$$S_1 = \{u_i^1, u_i^2 | i = 1,2, \ldots, |V(G\odot^k P_m)|\};$$

$$S_2 = \{u_i^{m-1}, u_i^m | i = 1,2, \ldots, |V(G\odot^k P_m)|\}$$

Sedangkan untuk $i = 3,6, \dots ,2 + \left\lceil\frac{m-4}{3}\right\rceil$ maka

$$S_i = \{u_1^j, \dots , u_1^{j+k}, u_2^j, \dots , u_2^{j+k}, \dots , u_n^j, \dots , u_n^{j+k}\}, \text{ dengan } 2 < j < m-1 \text{ dan } k < 3$$

Karena W adalah partisi pembeda dari graf $G\odot^k P_m$ maka $r(u|W) \neq r(v|W), \forall u, v \in V(G\odot^k P_m)$. Akibatnya $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi), \forall u, v \in V(G\odot^k P_m)$. Berikutnya akan dibuktikan bahwa $\forall u_i^j, u_k^l \in V(G\odot^{k+1} P_m)\backslash V(G\odot^k P_m)$, $r\left(u_i^j\middle|\Pi\right) \neq r\left(u_k^l\middle|\Pi\right)$ juga. Jelas bahwa $d\left(u_i^j, w\right) = d(v_i, w) + 1, \forall w \in V(G\odot^k P_m)$ dan v_i adalah titik terluar dari graf $G\odot^k P_m$. Karena $r(v_i|\Pi) \neq r(v_k|\Pi)$ maka $r\left(u_i^j\middle|\Pi\right) \neq r\left(u_k^l\middle|\Pi\right)$. Jadi terbukti bahwa Π merupakan partisi pembeda dari graf $G\odot^{k+1} P_m$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa Π adalah partisi pembeda dengan kardinalitas minimum. Diketahui bahwa Π mengelompokkan titik-titik pada graf $G\odot^k P_m$ menjadi $pd(G) + k\left(2 + \left\lceil\frac{m-4}{3}\right\rceil\right)$ buah partisi dan tiap salinan graf P_m ke dalam $2 + \left\lceil\frac{m-4}{3}\right\rceil$ buah partisi. Pada graf $G\odot^k P_m$, $pd(G) + k\left(2 + \left\lceil\frac{m-4}{3}\right\rceil\right)$ merupakan jumlah partisi yang paling minimum, sedangkan pada salinan graf P_m jika partisi yang dibuat kurang dari $2 + \left\lceil\frac{m-4}{3}\right\rceil$ buah, maka terdapat partisi yang memiliki anggota lebih dari 3 titik. Akibatnya, terdapat 2 titik, misal u dan v, sedemikian hingga $r(u|\Pi) = r(v|\Pi)$ karena $d(u, w) = d(v, w), \forall w \in V(G\odot^{k+1} P_m)\backslash\{u, v\}$.

Jadi $pd(G\odot^{k+1} P_m) = pd(G) + (k + 1)\left(2 + \left\lceil\frac{m-4}{3}\right\rceil\right)$ untuk $m > 4$. ■

Teorema 5. *Dimensi partisi pada graf hasil operasi korona $G\odot^k C_m$ adalah*

$$pd(G\odot^k C_m) = pd(G) + k\begin{cases} 3 & jika\, m \leq 6 \\ \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil & jika\, m > 6 \end{cases}$$

Bukti. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan teorema ini.

Langkah Awal:

Untuk $k = 1$ akan dibuktikan $pd(G\odot C_m) = pd(G) + \begin{cases} 3 & jika\, m \leq 6 \\ \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil & jika\, m > 6 \end{cases}$

Berdasarkan Teorema 2, terbukti bahwa $pd(G\odot C_m) = pd(G) + \begin{cases} 3 & jika\, m \leq 6 \\ \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil & jika\, m > 6 \end{cases}$

Langkah Induksi:

Jika $pd(G \odot^k C_m) = pd(G) + k \begin{cases} 3 & jika\, m \le 6 \\ \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil & jika\, m > 6 \end{cases}$ maka akan dibuktikan bahwa $pd(G \odot^{k+1} C_m) = pd(G) + (k+1) \begin{cases} 3 & jika\, m \le 6 \\ \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil & jika\, m > 6 \end{cases}$

Diberikan $V(G \odot^{k+1} C_m) = V(G \odot^k C_m) \cup \{u_i^j | i = 1,2, \dots, |V(G \odot^k C_m)|; j = 1,2, \dots, m\}$.

Kasus 1. Untuk $m \le 6$

Diketahui bahwa $pd(G \odot^k C_m) = pd(G) + 3k$. Akan dibuktikan bahwa $pd(G \odot^{k+1} C_m) = pd(G) + 3(k+1) = pd(G) + 3k + 3$.

Misalkan W adalah partisi pembeda dari graf $G \odot^k C_m$ kemudian diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\} \cup W$ dengan:

Untuk $m = 3$	Untuk $m = 4$	Untuk $m = 5$	Untuk $m = 6$
$S_1 = \{u_i^1 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_2 = \{u_i^2 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_3 = \{u_i^3 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 4,5, \dots, pd(G) + 3k + 3$	$S_1 = \{u_i^1, u_i^2 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_2 = \{u_i^3 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_3 = \{u_i^4 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 4,5, \dots, pd(G) + 3k + 3$	$S_1 = \{u_i^1, u_i^2 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_2 = \{u_i^3, u_i^4 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_3 = \{u_i^5 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 4,5, \dots, pd(G) + 3k + 3$	$S_1 = \{u_i^1, u_i^2 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_2 = \{u_i^3, u_i^4 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_3 = \{u_i^5, u_i^6 \| i = 1,2, \dots, \|V(G \odot^k C_m)\|\}$ $S_i \in W$ dengan $i = 4,5, \dots, pd(G) + 3k + 3$

Karena W adalah partisi pembeda dari graf $G \odot^k C_m$ maka $r(u|W) \ne r(v|W), \forall u, v \in V(G \odot^k C_m)$. Akibatnya $r(u|\Pi) \ne r(v|\Pi), \forall u, v \in V(G \odot^k C_m)$. Berikutnya akan dibuktikan bahwa $\forall u_i^j, u_k^l \in V(G \odot^{k+1} C_m) \backslash V(G \odot^k C_m), r(u_i^j | \Pi) \ne r(u_k^l | \Pi)$ juga. Jelas bahwa $d(u_i^j, w) = d(v_i, w) + 1, \forall w \in V(G \odot^k C_m)$ dan v_i adalah titik terluar dari graf $G \odot^k C_m$. Karena $r(v_i|\Pi) \ne r(v_k|\Pi)$ maka $r(u_i^j | \Pi) \ne r(u_k^l | \Pi)$. Jadi terbukti bahwa Π merupakan partisi pembeda dari graf $G \odot^{k+1} C_m$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa Π adalah partisi pembeda dengan kardinalitas minimum. Diketahui bahwa Π mengelompokkan titik-titik pada graf $G \odot^k C_m$ menjadi $pd(G) + 3k$ buah partisi dan tiap salinan graf C_m ke dalam 3 buah partisi. Pada graf $G \odot^k C_m$, $pd(G) + 3k$ merupakan jumlah partisi yang paling minimum, sedangkan pada salinan graf C_m, 3 buah partisi merupakan nilai yang paling minimum juga.

Jadi $pd(G \odot^{k+1} C_m) = pd(G) + 3(k+1)$ untuk $m \le 6$.

Kasus 2. Untuk $m > 6$

Diketahui bahwa $pd(G\odot^k C_m) = pd(G) + k\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$. Akan dibuktikan bahwa $pd(G\odot^{k+1} C_m) = pd(G) + (k+1)\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil = pd(G) + k\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil + \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$.

Misalkan W adalah partisi pembeda dari graf $G\odot^k C_m$ kemudian diberikan $\Pi = \left\{S_1, S_2, \dots, S_{\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil}\right\} \cup W$ dengan:

$$S_1 = \{u_i^1, u_i^2, u_i^3 | i = 1,2,\dots,n\}$$

$$S_2 = \{u_i^4, u_i^5, u_i^6 | i = 1,2,\dots,n\}$$

$$\vdots$$

$$S_{\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil} = \left\{u_i^j \middle| i = 1,2,\dots,|V(G\odot^k C_m)|; j = 3\left(\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil - 1\right) + k; 1 \le k < m(mod)3\right\}$$

Karena W adalah partisi pembeda dari graf $G\odot^k C_m$ maka $r(v_i|W) \neq r(v_j|W), \forall v_i, v_j \in V(G\odot^k C_m)$. Akibatnya $r(v_i|\Pi) \neq r(v_j|\Pi), \forall v_i, v_j \in V(G\odot^k C_m)$. Berikutnya akan dibuktikan bahwa $\forall u_i^j, u_k^l \in V(G\odot^{k+1} C_m)\backslash V(G\odot^k C_m), r(u_i^j|\Pi) \neq r(u_k^l|\Pi)$ juga. Jelas bahwa $d(u_i^j, w) = d(v_i, w) + 1, \forall w \in V(G\odot^k C_m)$ dan v_i adalah titik terluar dari graf $G\odot^k C_m$. Akibatnya karena $r(v_i|\Pi) \neq r(v_k|\Pi)$ maka $r(u_i^j|\Pi) \neq r(u_k^l|\Pi)$ untuk $i \neq k$. Sedangkan untuk $i = k$, $r(u_i^j|\Pi) \neq r(u_i^l|\Pi)$ juga karena $d(u_i^j, u_i^k) \neq d(u_i^l, u_i^k)$ jika u_i^k bertetangga dengan u_i^j tetapi tidak bertetangga dengan u_i^l atau sebaliknya. Jadi terbukti bahwa Π merupakan partisi pembeda dari graf$G\odot^{k+1} C_m$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa Π adalah partisi pembeda dengan kardinalitas minimum. Diketahui bahwa Π mengelompokkan titik-titik pada graf $G\odot^k C_m$ menjadi $pd(G) + k\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$ buah partisi dan tiap salinan graf C_m ke dalam $\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$ buah partisi. Pada graf G, $pd(G) + k\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$ merupakan jumlah partisi yang paling minimum, sedangkan pada salinan graf C_m jika partisi yang dibuat kurang dari $\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$ buah, maka terdapat partisi yang memiliki anggota lebih dari 3 titik. Akibatnya, terdapat 2 titik, misal u dan v, sedemikian hingga $r(u|\Pi) = r(v|\Pi)$ karena $d(u, w) = d(v, w), \forall w \in V(G\odot^{k+1} C_m)\backslash\{u, v\}$.

Jadi $pd(G\odot^{k+1} C_m) = pd(G) + (k+1)\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$ untuk $m > 6$. ■

Teorema 6. *Dimensi partisi pada graf hasil operasi korona* $G\odot^k K_m$ *adalah*

$$pd(G\odot^k K_m) = pd(G) + km$$

Bukti. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan teorema ini.

Langkah Awal:

Untuk $k = 1$ akan dibuktikan $pd(G\odot K_m) = pd(G) + km$

Berdasarkan Teorema 3, terbukti bahwa $pd(G\odot K_m) = pd(G) + m$

Langkah Induksi:

Jika $pd(G\odot^k K_m) = pd(G) + km$ maka akan dibuktikan bahwa $pd(G\odot^{k+1} K_m) = pd(G) + (k+1)m$

Diberikan $V(G\odot^{k+1} K_m) = V(G\odot^k K_m) \cup \{u_i^j | i = 1,2, \dots, |V(G\odot^k K_m)|;\ j = 1,2, \dots, m\}$.

Diketahui bahwa $pd(G\odot^k K_m) = pd(G) + km$. Akan dibuktikan bahwa $pd(G\odot^{k+1} K_m) = pd(G) + (k+1)m = pd(G) + km + m$.

Misalkan W adalah partisi pembeda dari graf $G\odot^k K_m$ kemudian diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots,\ S_m\} \cup W$ dengan:

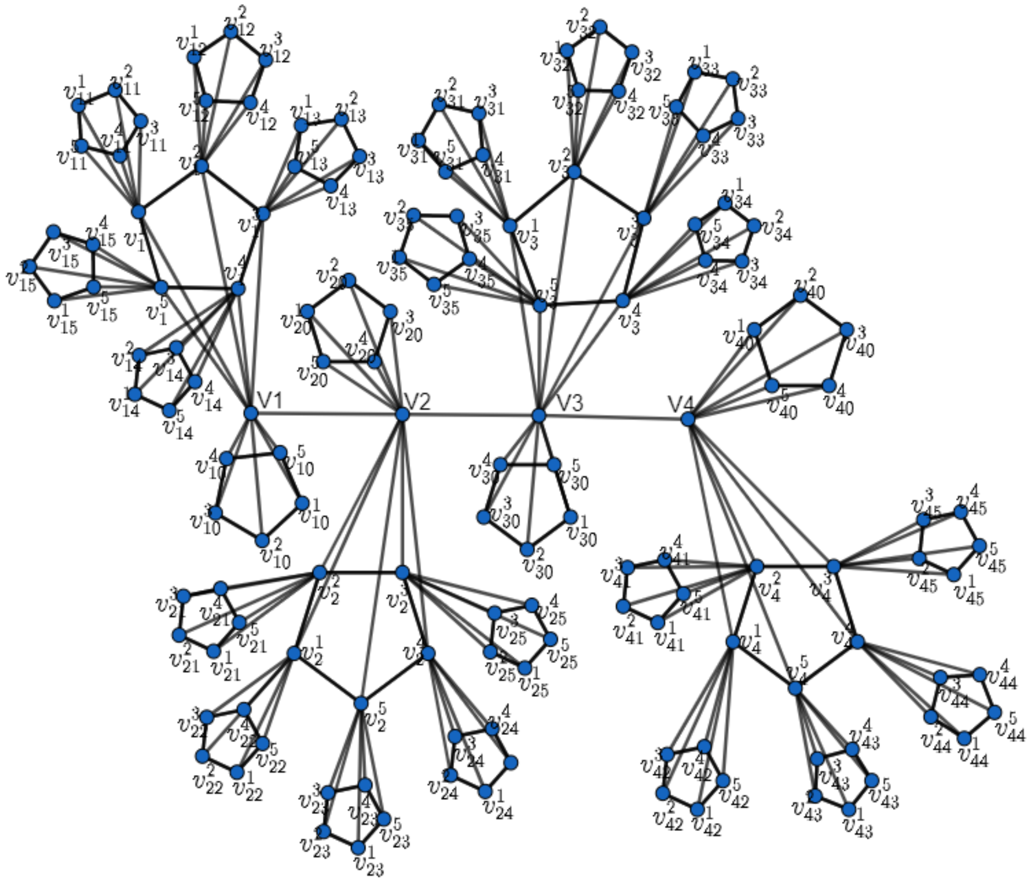
$$S_1 = \{u_i^1 | i = 1,2, \dots, |V(G\odot^k K_m)|\}$$
$$S_2 = \{u_i^2 | i = 1,2, \dots, |V(G\odot^k K_m)|\}$$
$$\vdots$$
$$S_{m-1} = \{u_i^{m-1} | i = 1,2, \dots, |V(G\odot^k K_m)|\}$$
$$S_m = \{u_i^m | i = 1,2, \dots, |V(G\odot^k K_m)|\}$$
$$S_i \in W \text{dengan } i = m+1, m+2, \dots, pd(G) + km + m$$

Karena $\boldsymbol{W}$ adalah partisi pembeda dari graf $\boldsymbol{G\odot^k K_m}$ maka $\boldsymbol{r(u|W) \neq r(v|W)}, \forall \boldsymbol{u, v} \in \boldsymbol{V(G\odot^k K_m)}$. Akibatnya $\boldsymbol{r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)}, \forall \boldsymbol{u, v} \in \boldsymbol{V(G\odot^k K_m)}$. Berikutnya akan dibuktikan bahwa $\forall \boldsymbol{u_i^j, u_k^l} \in \boldsymbol{V(G\odot^{k+1} K_m) \backslash V(G\odot^k K_m)}$, $\boldsymbol{r\left(u_i^j \middle| \Pi\right) \neq r\left(u_k^l \middle| \Pi\right)}$ juga. Jelas bahwa $\boldsymbol{d\left(u_i^j, w\right) = d(v_i, w) + 1}, \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V(G\odot^k K_m)}$ dan $\boldsymbol{v_i}$ adalah titik terluar dari graf $\boldsymbol{G\odot^k K_m}$. Karena $\boldsymbol{r(v_i|\Pi) \neq r(v_k|\Pi)}$ maka $\boldsymbol{r\left(u_i^j \middle| \Pi\right) \neq r\left(u_k^l \middle| \Pi\right)}$. Jadi terbukti bahwa $\boldsymbol{\Pi}$ merupakan partisi pembeda dari graf $\boldsymbol{G\odot^{k+1} K_m}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa Π adalah partisi pembeda dengan kardinalitas minimum. Diketahui bahwa Π mengelompokkan titik-titik pada graf $G \odot^k K_m$ menjadi $pd(G) + km$ buah partisi dan tiap salinan graf K_m ke dalam m buah partisi. Pada graf $G \odot^k K_m$, $pd(G) + km$ merupakan jumlah partisi yang paling minimum, sedangkan pada salinan graf K_m, m merupakan jumlah partisi yang paling minimum juga.

Jadi $pd(G \odot^{k+1} K_m) = pd(G) + (k+1)m$. ■

Untuk lebih memahami teorema-teorema di atas, berikut ini diberikan contoh dimensi partisi dan partisi pembeda pada graf $P_4 \odot^2 C_5$.



Gambar 1 Graf $\boldsymbol{P_4 \odot^2 C_5}$

Diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}$ dengan:

$S_1 = \{v_1\}$

$S_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$

$S_3 = \{v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_2^2, v_3^1, v_3^2, v_4^1, v_4^2\}$

$S_4 = \{v_1^3, v_1^4, v_2^3, v_2^4, v_3^3, v_3^4, v_4^3, v_4^4\}$

$S_5 = \{v_1^5, v_2^5, v_3^5, v_4^5\}$

$S_6 = \{v_{10}^1, v_{10}^2, v_{11}^1, v_{11}^2, v_{12}^1, v_{12}^2, v_{13}^1, v_{13}^2, v_{14}^1, v_{14}^2, v_{15}^1, v_{15}^2, v_{20}^1, v_{20}^2, v_{21}^1, v_{21}^2, v_{22}^1, v_{22}^2,$
$v_{23}^1, v_{23}^2, v_{24}^1, v_{24}^2, v_{25}^1, v_{25}^2, v_{30}^1, v_{30}^2, v_{31}^1, v_{31}^2, v_{32}^1, v_{32}^2, v_{33}^1, v_{33}^2, v_{34}^1, v_{34}^2, v_{35}^1, v_{35}^2,$
$v_{40}^1, v_{40}^2, v_{41}^1, v_{41}^2, v_{42}^1, v_{42}^2, v_{43}^1, v_{43}^2, v_{44}^1, v_{44}^2, v_{45}^1, v_{45}^2\}$

$S_7 = \{v_{10}^3, v_{10}^4, v_{11}^3, v_{11}^4, v_{12}^3, v_{12}^4, v_{13,}^3 v_{13}^4, v_{14}^3, v_{14}^4, v_{15}^3, v_{15}^4, v_{20}^3, v_{20}^4, v_{21}^3, v_{21}^4, v_{22}^3, v_{22}^4,$
$v_{23}^3, v_{23}^4, v_{24}^3, v_{24}^4, v_{25}^3, v_{25}^4, v_{30}^3, v_{30}^4, v_{31}^3, v_{31}^4, v_{32}^3, v_{32}^4, v_{33}^3, v_{33}^4, v_{34}^3, v_{34}^4, v_{35}^3,$
$v_{35}^4, v_{40}^3, v_{40}^4, v_{41}^3, v_{41}^4, v_{42}^3, v_{42}^4, v_{43}^3, v_{43}^4, v_{44}^3, v_{44}^4, v_{45}^3, v_{45}^4\}$

$S_8 = \{v_{10}^5, v_{11}^5, v_{12}^5, v_{13,}^5 v_{14}^5, v_{15}^5, v_{20}^5, v_{21}^5, v_{22}^5, v_{23}^5, v_{24}^5, v_{25}^5, v_{30}^5, v_{31}^5, v_{32}^5, v_{33}^5, v_{34}^5, v_{35}^5,$
$v_{40}^5, v_{41}^5, v_{42}^5, v_{43}^5, v_{44}^5, v_{45}^5\}$

Maka representasi $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{P}_4 \odot^2 \boldsymbol{C}_5)$ terhadap $\boldsymbol{\Pi}$ adalah:

$S_1 \colon r(v_1|\Pi) = (0,1,1,1,1,1,1,1)$

$$S_2 \colon \begin{cases} r(v_2|\Pi) = (1,0,1,1,1,1,1,1) \\ r(v_3|\Pi) = (2,0,1,1,1,1,1,1) \\ r(v_4|\Pi) = (3,0,1,1,1,1,1,1) \end{cases}$$

$$S_3 \colon \begin{cases} r(v_1^1|\Pi) = (1,2,0,2,1,1,1,1) \\ r(v_1^2|\Pi) = (1,2,0,1,2,1,1,1) \\ r(v_2^1|\Pi) = (2,1,0,2,1,1,1,1) \\ r(v_2^2|\Pi) = (2,1,0,1,2,1,1,1) \\ r(v_3^1|\Pi) = (3,1,0,2,1,1,1,1) \\ r(v_3^2|\Pi) = (3,1,0,1,2,1,1,1) \\ r(v_4^1|\Pi) = (4,1,0,2,1,1,1,1) \\ r(v_4^2|\Pi) = (4,1,0,1,2,1,1,1) \end{cases}$$

$$S_4 \colon \begin{cases} r(v_1^3|\Pi) = (1,2,1,0,2,1,1,1) \\ r(v_1^4|\Pi) = (1,2,2,0,1,1,1,1) \\ r(v_2^3|\Pi) = (2,1,1,0,2,1,1,1) \\ r(v_2^4|\Pi) = (2,1,2,0,1,1,1,1) \\ r(v_3^3|\Pi) = (3,1,1,0,2,1,1,1) \\ r(v_3^4|\Pi) = (3,1,2,0,1,1,1,1) \\ r(v_4^3|\Pi) = (4,1,1,0,2,1,1,1) \\ r(v_4^4|\Pi) = (4,1,2,0,1,1,1,1) \end{cases}$$

$$S_5 \colon \begin{cases} r(v_1^5|\Pi) = (1,2,1,1,0,1,1,1) \\ r(v_2^5|\Pi) = (2,1,1,1,0,1,1,1) \\ r(v_3^5|\Pi) = (3,1,1,1,0,1,1,1) \\ r(v_4^5|\Pi) = (4,1,1,1,0,1,1,1) \end{cases}$$

$$S_6 \colon \begin{cases} r(v_{10}^1|\Pi) = (1,2,2,2,2,0,2,1) \\ r(v_{10}^2|\Pi) = (1,2,2,2,2,0,1,2) \\ r(v_{11}^1|\Pi) = (2,3,1,3,2,0,2,1) \\ r(v_{11}^2|\Pi) = (2,3,1,3,2,0,1,2) \\ \qquad\qquad \vdots \\ r(v_{15}^1|\Pi) = (2,3,2,2,1,0,2,1) \\ r(v_{15}^2|\Pi) = (2,3,2,2,1,0,1,2) \\ r(v_{20}^1|\Pi) = (2,1,2,2,2,0,2,1) \\ r(v_{20}^2|\Pi) = (2,1,2,2,2,0,1,2) \\ r(v_{21}^1|\Pi) = (3,2,1,2,3,0,2,1) \\ r(v_{21}^2|\Pi) = (3,2,1,2,3,0,1,2) \\ \qquad\qquad \vdots \\ r(v_{25}^1|\Pi) = (3,2,2,1,3,0,2,1) \\ r(v_{25}^2|\Pi) = (3,2,2,1,3,0,1,2) \\ r(v_{30}^1|\Pi) = (3,1,2,2,2,0,2,1) \\ r(v_{30}^2|\Pi) = (3,1,2,2,2,0,1,2) \\ r(v_{31}^1|\Pi) = (4,2,1,3,2,0,2,1) \\ r(v_{31}^2|\Pi) = (4,2,1,3,2,0,1,2) \\ \qquad\qquad \vdots \\ r(v_{35}^1|\Pi) = (4,2,2,2,1,0,2,1) \\ r(v_{35}^2|\Pi) = (4,2,2,2,1,0,1,2) \\ r(v_{40}^1|\Pi) = (4,1,2,2,2,0,2,1) \\ r(v_{40}^2|\Pi) = (4,1,2,2,2,0,2,1) \\ r(v_{41}^1|\Pi) = (5,2,1,2,3,0,2,1) \\ r(v_{41}^2|\Pi) = (5,2,1,2,3,0,1,2) \\ \qquad\qquad \vdots \\ r(v_{45}^1|\Pi) = (5,2,2,1,3,0,2,1) \\ r(v_{45}^2|\Pi) = (5,2,2,1,3,0,1,2) \end{cases}$$

$$S_7: \begin{cases} r(v_{10}^3|\Pi) = (1,2,2,2,2,1,0,2) \\ r(v_{10}^4|\Pi) = (1,2,2,2,2,2,0,1) \\ r(v_{11}^3|\Pi) = (2,3,1,3,2,1,0,2) \\ r(v_{11}^4|\Pi) = (2,3,1,3,2,2,0,1) \\ \vdots \\ r(v_{15}^3|\Pi) = (2,3,2,2,1,1,0,2) \\ r(v_{15}^4|\Pi) = (2,3,2,2,1,2,0,1) \\ r(v_{20}^3|\Pi) = (2,1,2,2,2,1,0,2) \\ r(v_{20}^4|\Pi) = (2,1,2,2,2,2,0,1) \\ r(v_{21}^3|\Pi) = (3,2,1,2,2,1,0,2) \\ r(v_{21}^4|\Pi) = (3,2,1,2,2,2,0,1) \\ \vdots \\ r(v_{25}^3|\Pi) = (3,2,2,1,3,1,0,2) \\ r(v_{25}^4|\Pi) = (3,2,2,1,3,2,0,1) \\ r(v_{30}^3|\Pi) = (3,1,2,2,2,1,0,2) \\ r(v_{30}^4|\Pi) = (3,1,2,2,2,2,0,1) \\ r(v_{31}^3|\Pi) = (4,2,1,3,2,1,0,2) \\ r(v_{31}^4|\Pi) = (4,2,1,3,2,2,0,1) \\ \vdots \\ r(v_{35}^3|\Pi) = (4,2,2,2,1,1,0,2) \\ r(v_{35}^4|\Pi) = (4,2,2,2,1,2,0,1) \\ r(v_{40}^3|\Pi) = (4,1,2,2,2,1,0,2) \\ r(v_{40}^4|\Pi) = (4,1,2,2,2,2,0,1) \\ r(v_{41}^3|\Pi) = (5,2,1,2,3,1,0,2) \\ r(v_{41}^4|\Pi) = (5,2,1,2,3,2,0,1) \\ \vdots \\ r(v_{45}^3|\Pi) = (5,2,2,1,3,1,0,2) \\ r(v_{45}^4|\Pi) = (5,2,2,1,3,2,0,1) \end{cases} \quad S_8: \begin{cases} r(v_{10}^5|\Pi) = (1,2,2,2,2,1,1,0) \\ r(v_{11}^5|\Pi) = (2,3,1,3,2,1,1,0) \\ r(v_{12}^5|\Pi) = (2,3,1,2,3,1,1,0) \\ r(v_{13}^5|\Pi) = (2,3,2,1,3,1,1,0) \\ r(v_{14}^5|\Pi) = (2,3,3,1,2,1,1,0) \\ r(v_{15}^5|\Pi) = (2,3,2,2,1,1,1,0) \\ r(v_{20}^5|\Pi) = (2,1,2,2,2,1,1,0) \\ r(v_{21}^5|\Pi) = (3,2,1,2,3,1,1,0) \\ r(v_{22}^5|\Pi) = (3,2,1,3,2,1,1,0) \\ r(v_{23}^5|\Pi) = (3,2,2,2,1,1,1,0) \\ r(v_{24}^5|\Pi) = (3,2,3,1,2,1,1,0) \\ r(v_{25}^5|\Pi) = (3,2,2,1,3,1,1,0) \\ r(v_{30}^5|\Pi) = (3,1,2,2,2,1,1,0) \\ r(v_{31}^5|\Pi) = (4,2,1,3,2,1,1,0) \\ r(v_{32}^5|\Pi) = (4,2,1,2,3,1,1,0) \\ r(v_{33}^5|\Pi) = (4,2,2,1,3,1,1,0) \\ r(v_{34}^5|\Pi) = (4,2,3,1,2,1,1,0) \\ r(v_{35}^5|\Pi) = (4,2,2,2,1,1,1,0) \\ r(v_{40}^5|\Pi) = (4,1,2,2,2,1,1,0) \\ r(v_{41}^5|\Pi) = (5,2,1,2,3,1,1,0) \\ r(v_{42}^5|\Pi) = (5,2,1,3,2,1,1,0) \\ r(v_{43}^5|\Pi) = (5,2,2,2,1,1,1,0) \\ r(v_{44}^5|\Pi) = (5,2,3,1,2,1,1,0) \\ r(v_{45}^5|\Pi) = (5,2,2,1,3,1,1,0) \end{cases}$$

Karena $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ untuk setiap $u, v \in V(P_4 \odot^2 C_5)$ maka Π adalah partisi pembeda dari graf $P_4 \odot^2 C_5$ dan $pd(P_4 \odot^2 C_5) = 8$

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas, dapat ditarik kesimpulan berupa hasil dimensi partisi graf hasil operasi korona Tingkat-k yakni:

1. $pd(G\odot^k P_m) = pd(G) + k\begin{cases} 2 & jika\, m \leq 4 \\ 2 + \left\lceil \frac{m-4}{3} \right\rceil & jika\, m > 4 \end{cases}$
2. $pd(G\odot^k C_m) = pd(G) + k\begin{cases} 3 & jika\, m \leq 6 \\ \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil & jika\, m > 6 \end{cases}$
3. $pd(G\odot^k K_m) = pd(G) + km$

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk melengkapi penelitian ini untuk dimensi partisi pada graf $G \odot^k H$ dengan G dan H sebarang graf terhubung tak trivial.

5 Daftar Pustaka

[1] R. Ganguli and S. Roy, "A study on course timetable scheduling using graph coloring approach," *International Journal of Computational and Applied Mathematics,* pp. 469-485, 2017.

[2] Z. Amri, I. Irvan, I. Maryanti and H. Sumardi, "Odd Graceful Labeling on the Ilalang Graph and It's Variation," *Journal of Physics: Conference Series,* vol. 1731, no. 012030, pp. 1-5, 2021.

[3] G. Chartrand, E. Salehi and P. Zhang, "The Partition Dimension of a Graph," *Aequationes Math.,* no. 59, pp. 45-54, 2000.

[4] G. Chartrand, L. Eroh, M. Johnson and O. Oellermann, "Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph," *Discrete Appl. Math.,* no. 105, pp. 99-113, 2000.

[5] A. Khairiah, E. Noviani and F. Fran, "Dimensi Partisi pada Graf," *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster),* vol. 9, pp. 189-194, 2020.

[6] Faisal, N. Mardiana and H. Rosiyanti, "Dimensi Partisi Graf Hasil Operasi Comb Graf Lingkaran dan Graf Lintasan," *FIBONACCI Jurnal Pendidikan Mtematika dan Matematika,* vol. 5, pp. 163-174, 2 Desember 2019.

[7] A. S. Daming, H. Hasmawati, L. Haryanto and B. Nurwahyu, "Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Siklus," *Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi,* vol. 16, no. 2, pp. 199-207, 2020.

[8] R. Anggriani, "Dimensi Partisi pada Graf Sunlet dan Amalgamasi Graf Sunlet," Universitas Negeri Malang, Malang, 2023.